

Vorlesung

Vektorraum \mathbb{Z}_7^3

$$\mathbb{Z}_7^3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Z}_7 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$4 \odot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Basis in \mathbb{Z}_7^3 :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\dim \mathbb{Z}_7^3 = 3$$

$$|\mathbb{Z}_7^3| = |\mathbb{Z}_7|^3 = 7^3$$

„Kardinalität“

Untervektorraum von \mathbb{Z}_7^3 :

$$\text{z.B. } \mathcal{U} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z}_7 \right\}$$

$$\dim \mathcal{U} = \underline{\underline{2}}$$

$$|\mathcal{U}| = 7^2 = \underline{\underline{49}}$$

Beispiel zur Analyse einer linearen Abbildung

$L: \mathbb{Z}_7^4 \rightarrow \mathbb{Z}_7^4$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

als $L: \vec{x} \mapsto A \vec{x}$.

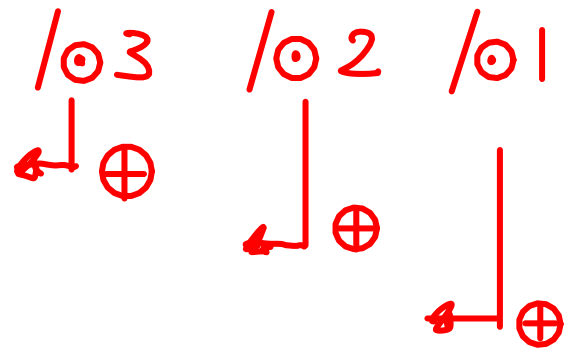
Bestimme zunächst alle Elemente aus \mathbb{Z}_7^4 , die durch L auf den Nullvektor abgebildet werden. Man nennt die Gesamtheit dieser Elemente den **Kern von L** , kurz **Kern (L)**.

Bestimme $\vec{x} \in \mathbb{Z}_7^4$ mit $A \vec{x} = \vec{0}$:

5	4	5	2	0
4	3	2	5	0
5	3	5	1	0
6	3	3	6	0

/ 0 3

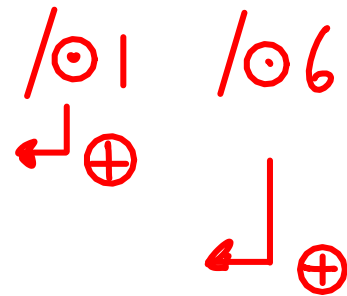
1	5	1	6	0
4	3	2	5	0
5	3	5	1	0
6	3	3	6	0



1	5	1	6	0
0	4	5	2	0
0	6	0	6	0
0	1	4	5	0

$/\odot 2$

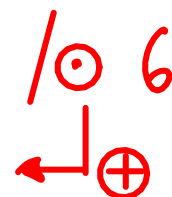
1	5	1	6	0
0	1	3	4	0
0	6	0	6	0
0	1	4	5	0



1	5	1	6	0
0	1	3	4	0
0	0	3	3	0
0	0	1	1	0

$/\odot 5$

1	5	1	6	0
0	1	3	4	0
0	0	1	1	0
0	0	1	1	0



1	5	1	6	0	(1)
0	1	3	4	0	(2)
0	0	1	1	0	(3)
0	0	0	0	0	(4)

Auflösen von unten:

$$(4) \quad 0 \odot x_4 = 0, \text{ also } \underline{x_4 := 1 \in \mathbb{Z}_7 \text{ bel.}}$$

$$(3) \quad x_3 \oplus 1 = 0 \Rightarrow \underline{x_3 = -1 = 6 \odot 1}$$

$$(2) \quad x_2 \oplus 3 \odot 6 \odot 1 \oplus 4 \odot 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{x_2 = -1 = 6 \odot 1}$$

$$(1) \quad x_1 \oplus 5 \odot 6 \odot 1 \oplus 6 \odot 1 \oplus 6 \odot 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{x_1 = 0}$$

also:

$$\underline{\mathbb{L} = \text{Kern}(L)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \odot 1 \\ 6 \odot 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid 1 \in \mathbb{Z}_7 \right\}$$

$$= \left\{ 1 \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \mid 1 \in \mathbb{Z}_7 \right\}$$

Untervektorraum
des Definitionsber.
von L

$$\underline{\underline{\dim \text{Kern}(L) = 1}} \quad (\text{Anzahl frei wählbarer Param.})$$

$$\underline{\underline{B_{\text{Kern}(L)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}} \quad (\text{Basis von Kern}(L))$$

Bestimmung einer Basis von $\text{Bild}(L)$, also des Spans der Spaltenvektoren:

$$\begin{array}{cccc} \textcircled{5} & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \end{array} \quad \odot 3$$

„Schreibe Spaltenvektoren
zeilenweise in Matrix“

$$\begin{array}{cccc} \textcircled{1} & 5 & 1 & 4 \\ \boxed{4} & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 5 & 3 \\ \boxed{2} & 5 & 1 & 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} / \odot 3 \\ \leftarrow \oplus \end{array} \quad \begin{array}{l} / \odot 2 \\ \leftarrow \oplus \end{array} \quad \begin{array}{l} / \odot 5 \\ \leftarrow \oplus \end{array}$$

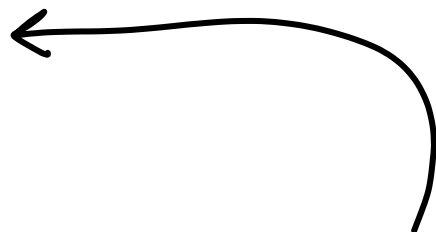
$$\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & \textcircled{4} & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 5 \end{array} \quad / \odot 2$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & \textcircled{1} & 5 & 2 \\ 0 & \boxed{5} & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{2} & 6 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} / \odot 2 \\ \leftarrow \oplus \end{array} \quad \begin{array}{l} / \odot 5 \\ \leftarrow \oplus \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 5 & 1 & 4 \\
 0 & 1 & 5 & 2 \\
 0 & 0 & \textcircled{3} & 1 \\
 0 & 0 & \boxed{3} & 1
 \end{array}$$

$\div \odot -1$ bzw. $\odot 6$
 $\swarrow \oplus$

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 5 & 1 & 4 \\
 0 & 1 & 5 & 2 \\
 0 & 0 & 3 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$



Also: $\dim \text{Bild}(L) = 3$ (Nicht-0- Zeilen)

Konvention: $\text{Rang}(L) := \dim \text{Bild}(L)$.

$$\textcircled{B}_{\text{Bild}(L)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Basis von $\text{Bild}(L)$

$$\text{Bild}(L) = \text{Spann}_{\mathbb{Z}_7} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Untervektorraum des Wertebereichs von L

Beobachtung:

$$\underbrace{\dim \text{Bild}(L)}_3 + \underbrace{\dim \text{Kern}(L)}_1 = \underbrace{\dim \mathbb{Z}_7^4}_4$$

„Dimensionsatz“