Fachhochschule Dortmund
University of Applied Sciences and Arts

Studiengang Informatik

Prüfungsfach: Mathematik für Informatik 2 (dual)
Prüfer: Prof. Dr. Burkhard Lenze
Prüfungstermin: XX.XX.20XX
Dauer der Prüfung: 90 Minuten
Hilfsmittel: Ein beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt

Name, Vorname: ______________________________

Matrikel/Platz: ____________________ / ____________

Unterschrift: ______________________________

Hinweise:

• Füllen Sie zunächst das Deckblatt aus und unterschreiben Sie es! •
• Es gibt insgesamt 6 Aufgaben und maximal 105 Punkte sind erreichbar! •

• Verwenden Sie für die Lösungen nur die gegebenen Blätter! •
• Verwenden Sie einen dokumentenechten Stift (keinen Bleistift)! •
• Lassen Sie bitte alle Blätter im zusammengehefteten Zustand! •
• Geben Sie bei allen Aufgaben den kompletten Lösungsweg an! •
• Ohne den zugehörigen Lösungsweg gibt es stets nur 0 Punkte! •

Bewertungsschlüssel:

Punkte	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50	< 50
Note	1.0	1.3	1.7	2.0	2.3	2.7	3.0	3.3	3.7	4.0	5.0

Ergebnis:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6		**Summe**	**Note**
maximale Punkte	15	15	20	20	15	20		105	
erhaltene Punkte									

Name: ________________ Vorname: ________________

Aufgabe 1 *Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:* 15 Punkte

(a) $\frac{1-\mathrm{i}}{(2+2\mathrm{i})^2}$, *(b)* $(2\mathrm{i})^{10}$, *(c)* $\left(e^{-\pi \mathrm{i}}\right)^4$.

Lösung:

(a)

$$\frac{1-\mathrm{i}}{(2+2\mathrm{i})^2} = \frac{1-\mathrm{i}}{8\mathrm{i}} = \frac{-1}{8} + \frac{-1}{8}\mathrm{i} ,$$

(b)

$$(2\mathrm{i})^{10} = -1024 ,$$

(c)

$$\left(e^{-\pi \mathrm{i}}\right)^4 = 1 .$$

$$e^{-4\pi i} = \underbrace{\cos(-4\pi)}_{=1} + i \underbrace{\sin(-4\pi)}_{=0}$$

Eulersche Formel

Alternativ:

$$(1+i)^{10} =$$

$$= \left((1+i)^2\right)^5 = (1^2 + 2i + \underbrace{i^2}_{=-1})^5 = (2i)^5 = 32i$$

$$|(2+3i)^4| =$$

$$= (|2+3i|)^4 = \left(\sqrt{2^2+3^2}\right)^4 = 13^2 = 169$$

Aufgabe 2 *Faktorisieren Sie die folgenden algebraischen Polynome in Linearfaktoren:*

(a) $p(z) := z^3 - 2z^2 + 9z - 18$, 10 Punkte

(b) $q(z) := z^4 - 25$. 5 Punkte

Lösung:

```
(a) Die Faktorisierung des Polynoms ergibt sich wie folgt:

Rate NST z_1 = 2

Abdivision: (z^3 - 2z^2 + 9z -18):(z-2) = z^2 + 9
           -(z^3 - 2z^2)
           -------------
                     0 + 9z -18
                       -(9z -18)
                       --------------
                                 0

Faktorisierung des quadratischen Polynoms:

     z^2 + 9 = (z+3i)(z-3i)

Also: p(z) = (z-2)(z+3i)(z-3i)

(b) Die Faktorisierung des Polynoms ergibt sich wie folgt, wobei man
    sich an die dritte binomische Formel erinnern sollte:

    q(z) = z^4 - 25 =
         = (z^2 + 5)*(z^2 - 5)
         = (z + sqrt(5)i)*(z - sqrt(5)i)*(z + sqrt(5))*(z - sqrt(5))
```

Name: ________________ Vorname: ________________

Aufgabe 3 *Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,* 20 Punkte

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 6 & -6 & 0 \\ 12 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie ferner eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, so dass $C^{-1}AC$ Diagonalgestalt hat.

Lösung:

1. Schritt: Aus der Gleichung

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 & -1 \\ 6 & -6-\lambda & 0 \\ 12 & -6 & -3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - 5\lambda^2 - 6\lambda = -\lambda(\lambda+2)(\lambda+3) = 0$$

berechnen sich die Lösungen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$ und $\lambda_3 = -3$, also die Eigenwerte von A.
2. Schritt: Aus dem Gleichungssystem

$$(A - \lambda_1 E)\vec{r}^{(1)} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 4-0 & -2 & -1 \\ 6 & -6-0 & 0 \\ 12 & -6 & -3-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \\ r_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergeben sich alle zu $\lambda_1 = 0$ gehörenden Eigenvektoren zu $\vec{r}^{(1)} = \alpha\,(1,1,2)^T,\ \ \alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Aus dem Gleichungssystem

$$(A - \lambda_2 E)\vec{r}^{(2)} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 4+2 & -2 & -1 \\ 6 & -6+2 & 0 \\ 12 & -6 & -3+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(2)} \\ r_2^{(2)} \\ r_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergeben sich alle zu $\lambda_2 = -2$ gehörenden Eigenvektoren zu $\vec{r}^{(2)} = \alpha\,(2,3,6)^T,\ \ \alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Aus dem Gleichungssystem

$$(A - \lambda_3 E)\vec{r}^{(3)} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 4+3 & -2 & -1 \\ 6 & -6+3 & 0 \\ 12 & -6 & -3+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(3)} \\ r_2^{(3)} \\ r_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergeben sich alle zu $\lambda_3 = -3$ gehörenden Eigenvektoren zu $\vec{r}^{(3)} = \alpha\,(1,2,3)^T,\ \ \alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Die gesuchte Matrix C kann man z.B. erhalten, indem man die Eigenvektoren als Spaltenvektoren in C schreibt, also

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Name: ________________ Vorname: ________________

Aufgabe 4 *Gegeben sei die lineare Abbildung* $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *durch Angabe ihrer Wirkung auf die Einheitsbasis im* $\mathbb{R}^3$*, konkret* 20 Punkte

$$L((1,0,0)^T) := (1,2,3)^T\ , \quad L((0,1,0)^T) := (2,4,6)^T\ , \quad L((0,0,1)^T) := (-3,-6,-9)^T\ .$$

Bestimmen Sie Kern(L) *und* Bild(L) *sowie eine Basis* $\mathscr{B}_{\text{Kern}(L)}$ *von* Kern(L) *und eine Basis* $\mathscr{B}_{\text{Bild}(L)}$ *von* Bild(L)*. Geben Sie ferner* $\dim \text{Kern}(L)$ *und* $\dim \text{Bild}(L) = \text{Rang}(L)$ *an.*

$$L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Um Kern(L) zu berechnen, ist das lineare Gleichungssystem

$$x_1(1,2,3)^T + x_2(2,4,6)^T + x_3(-3,-6,-9)^T = (0,0,0)^T$$

zu lösen. Als Lösung erhält man

$$\mathbf{L} = \text{Kern}(L) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Also ist zunächst

$$\dim \text{Kern}(L) = 2$$

und aufgrund der Dimensionsformel

$$\text{Rang}(L) = \dim \text{Bild}(L) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Kern}(L) = 3 - 2 = 1$$

und z.B.

$$\mathscr{B}_{\text{Kern}(L)} := \{(-2,1,0)^T, (3,0,1)^T\}$$

eine Basis von Kern(L). Eine Basis von Bild(L) kann man schließlich berechnen, indem man die Bilder der Einheitsvektoren zeilenweise mittels Gaußschem Algorithmus reduziert, also

$$\begin{array}{rrrcc} 1 & 2 & 3 & \cdot(-2) & \cdot 3 \\ 2 & 4 & 6 & \leftarrow + & | \\ -3 & -6 & -9 & & \leftarrow + \\ \hline 1 & 2 & 3 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{array}$$

Also gilt z.B.

$$\mathscr{B}_{\text{Bild}(L)} = \{(1,2,3)^T\}$$

und

$$\text{Bild}(L) = \text{Spann}_{\mathbb{R}}\{(1,2,3)^T\}.$$

$$\begin{array}{rrrr|cc} 1 & 2 & -3 & 0 & /\cdot(-2) & /\cdot(-3) \\ 2 & 4 & -6 & 0 & \leftarrow + & \\ 3 & 6 & -9 & 0 & & \leftarrow + \\ \hline 1 & 2 & -3 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \end{array}$$

$\Longrightarrow x_1 + 2\alpha - 3\beta = 0 \Longrightarrow \underline{\underline{x_1 = 3\beta - 2\alpha}}$

$\Longrightarrow 0x_2 = 0$, also $\underline{\underline{x_2 = \alpha \in \mathbb{R}}}$

$\Longrightarrow 0x_3 = 0$, also $\underline{\underline{x_3 = \beta \in \mathbb{R}}}$

Aufgabe 5 *Berechnen Sie, falls möglich, die Grenzwerte der angegebenen vier Folgen:* 15 Punkte

$$\left(\frac{2n^2+n}{6n^4+4n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \left(\frac{2n^5+6n+4}{6n^3+4n+12}\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

$$\left(\frac{5n^3+8n+12}{20n^3+4n^2+32}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \left(\frac{3n^3+8}{3n^3+12}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Lösung:
Die Lösungen ergeben sich unter Ausnutzung der Linearitäts- und Quotientenregel wie folgt, wobei es sich bei der zweiten Folge um einen gewissen Sonderfall handelt, da diese nicht konvergiert, sondern – wie man sagt – bestimmt gegen ∞ divergiert:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{6n^4+4n^2}=0\,, \qquad \frac{2n^5+6n+4}{6n^3+4n+12}\to\infty\,(n\to\infty)\,,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3+8n+12}{20n^3+4n^2+32}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}\,, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+8}{3n^3+12}=1\,.$$

Name: ________________ Vorname: ________________

Aufgabe 6 *Gegeben seien die drei Funktionen*

$f(x) := x^3 - 3x^2 - x + 2,$ $\qquad g(x) := x\sin(x),$ $\qquad h(x) := x^2\exp(x^3).$

Berechnen Sie:

(a) 2 Punkte

$$(g \circ h)(x)\ ,$$

(b) 8 Punkte

$$f'(x)\ ,\ \ g'(x)\ \ und\ \ h'(x)\ ,$$

(c) 10 Punkte

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx\ ,\ \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx\ \ und\ \int_{0}^{1} h(x)dx\ .$$

Lösung:

(a)

$$g(h(x)) = x^2\exp(x^3)\sin(x^2\exp(x^3))\ ,$$

(b)

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 1\ ,\ \ g'(x) = \sin(x) + x\cos(x)\ ,\ \ h'(x) = 2x\exp(x^3) + 3x^4\exp(x^3)\ ,$$

(c)

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx = -4\ ,\ \ \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = 2\pi\ ,\ \ \int_{0}^{1} h(x)dx = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e\ .$$

$$\int_{-1}^{3}(x^3 - 3x^2 - x + 2)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{3} = \cdots = \underline{\underline{-4}}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x}_{g(x)}\, \underbrace{\sin(x)}_{f'(x)}\,dx = \left[\underbrace{x}_{g(x)}\underbrace{(-\cos(x))}_{f(x)}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{1}_{g'(x)}\cdot\underbrace{(-\cos(x))}_{f(x)}\,dx = \cdots = \underline{\underline{2\pi}}$$

$$\int_{0}^{1} x^2 e^{x^3}\,dx = \left[\frac{1}{3}e^{x^3}\right]_{0}^{1} = \underline{\underline{\frac{1}{3}e - \frac{1}{3}}}$$