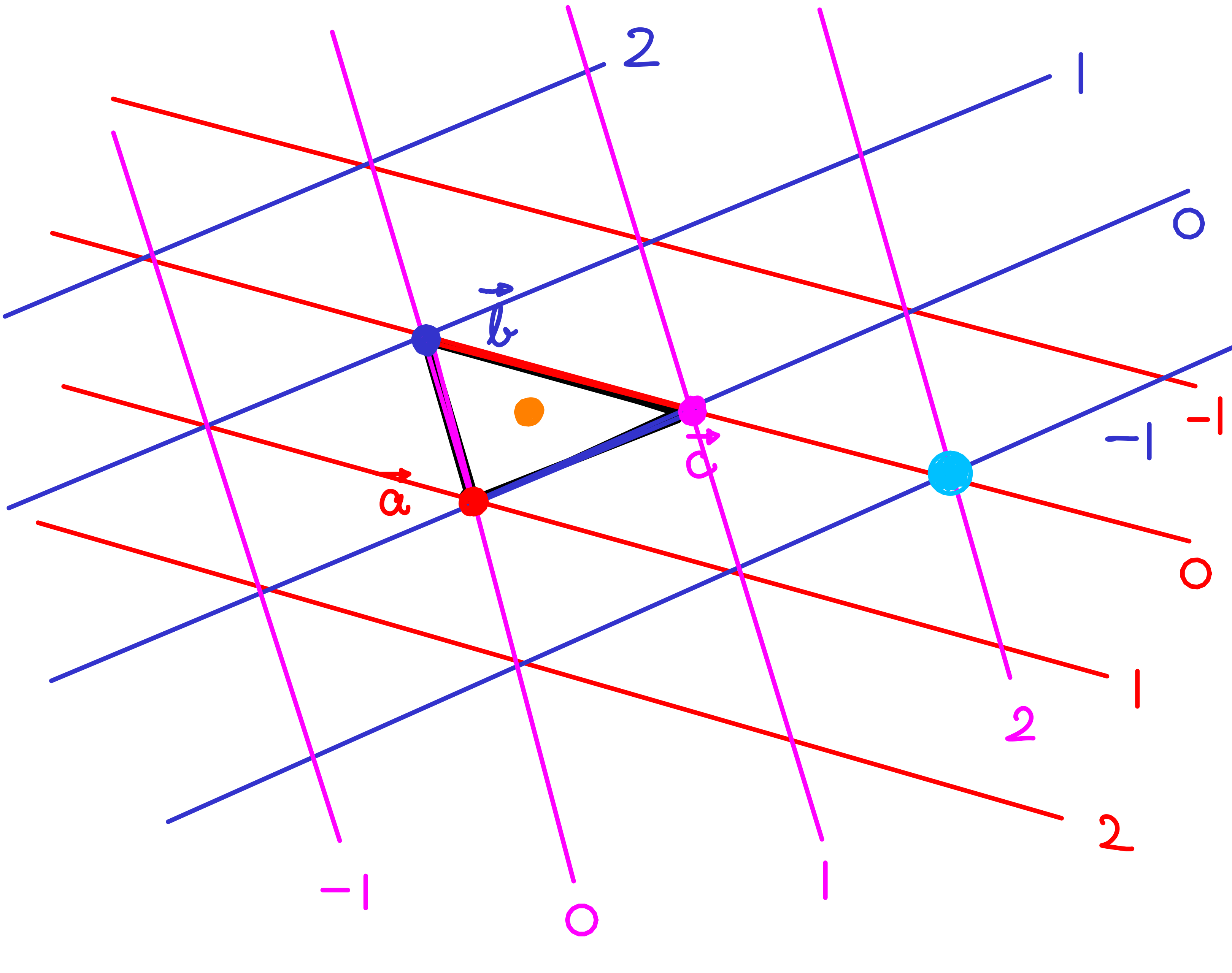
Vorlesung

Geometrische Motivation für baryzentrische Koordinaten

Anwendung:

https://inst.eecs.berkeley.edu/~cs194-26/fa18/upload/files/proj4/cs194-26-adv/docs/

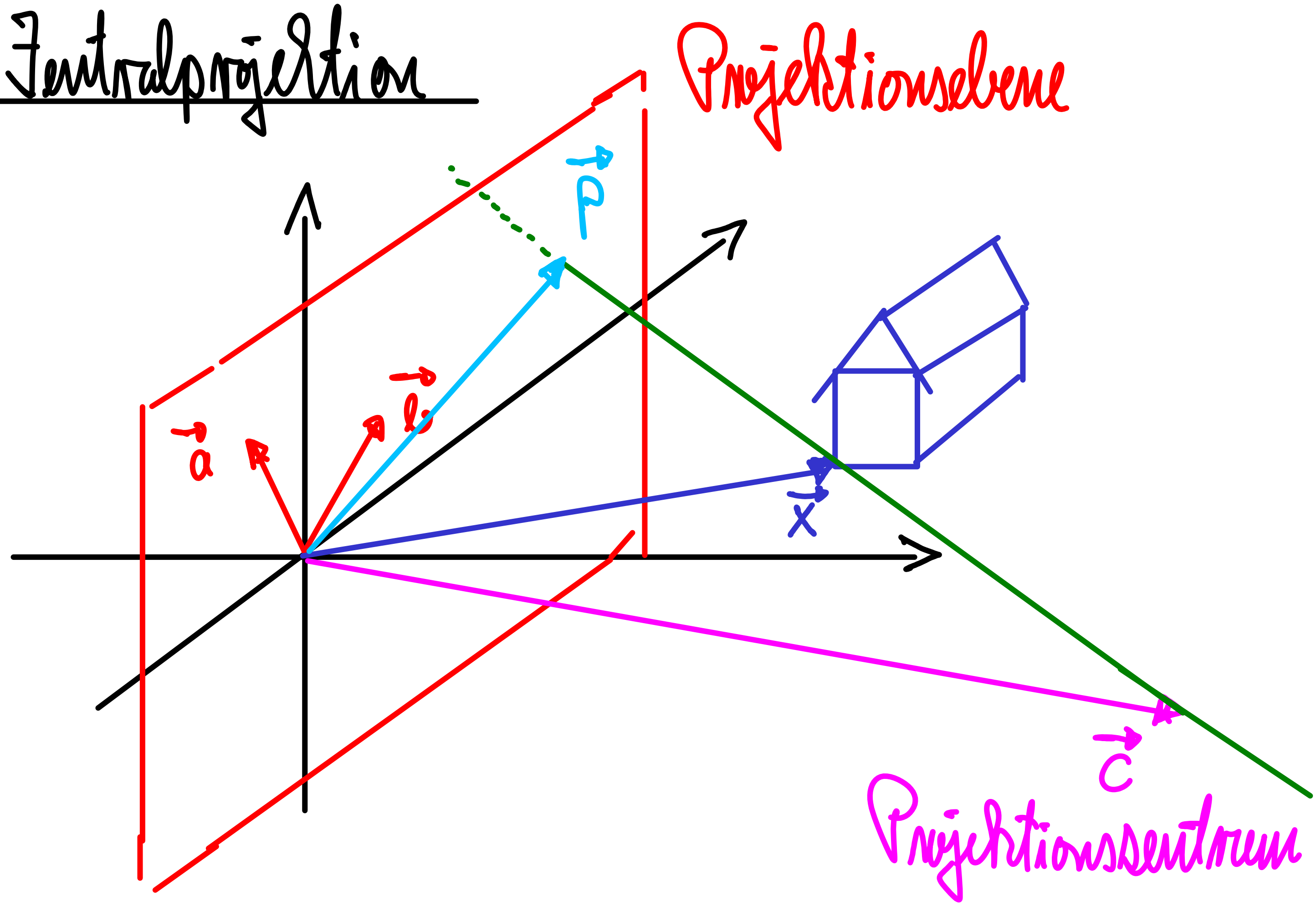


$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Zentralprojektion



Zu lösendes Gleichungssystem für α, β, γ:

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{x} + \gamma(\vec{c} - \vec{x})$$

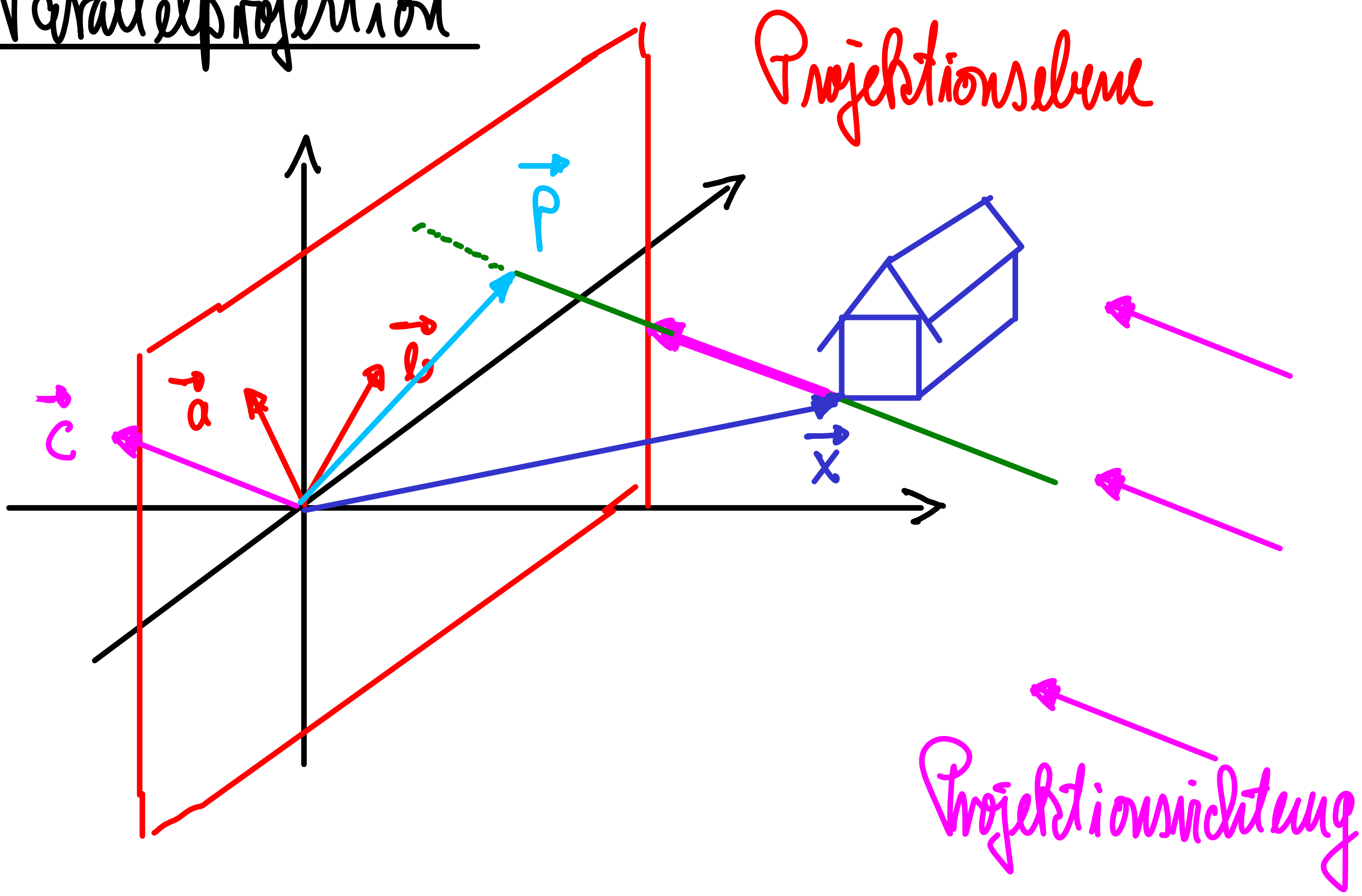
Dann Berechnung der Zentralprojektion $\vec{p}$ gemäß

$$\vec{p} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$$

oder

$$\vec{p} = \vec{x} + \gamma(\vec{c} - \vec{x})$$

Parallelprojektion



Zu lösendes Gleichungssystem für α, β, γ:

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{x} + \gamma \vec{c}$$

Dann Berechnung der Parallelprojektion $\vec{p}$ gemäß

$$\vec{p} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$$

oder

$$\vec{p} = \vec{x} + \gamma \vec{c}$$

Übung

Aufgabe (kart. Koordinatentransf.)

Gegeben sei der Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ durch die Koordinaten

$\alpha := 1$, $\beta := -1$, $\gamma := 1$ bezüglich der Basis

$$\vec{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} := \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Koordinaten $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ von $\vec{x}$ bezüglich der neuen Basis

$$\vec{p} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $\vec{x} = \underline{\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}} = \tilde{\alpha} \vec{p} + \tilde{\beta} \vec{q} + \tilde{\gamma} \vec{r}$

$$\underbrace{1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}}_{(3,9,4)^T} = \tilde{\alpha} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \tilde{\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{\gamma} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{cccc}
\tilde\alpha & \tilde\beta & \tilde\gamma & \\
0 & 1 & 1 & 3 \\
1 & 1 & 2 & 9 \\
2 & 0 & 1 & 4
\end{array}$$

tauschen!

$$\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 2 & 9 \\
\boxed{0} & 1 & 1 & 3 \\
\boxed{2} & 0 & 1 & 4
\end{array}$$

$/\cdot(-2)$ +

$$\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 2 & 9 \\
0 & 1 & 1 & 3 \\
0 & \boxed{-2} & -3 & -14
\end{array}$$

$/\cdot 2$ +

$$\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 2 & 9 \\
0 & 1 & 1 & 3 \\
0 & 0 & -1 & -8
\end{array}$$

Aufrollen von unten: $\underline{\underline{\tilde\gamma = 8,\ \tilde\beta = -5,\ \tilde\alpha = -2}}$

Alternative:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{K} \begin{pmatrix} \tilde\alpha \\ \tilde\beta \\ \tilde\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 10 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechne Inverse der linken Matrix K :

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
/\cdot(-1) \\
+ \\

\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
 \\
/\cdot(-2) \\
+
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -2 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{llll}
 & + & & \\
+ & & & \\
/\cdot 1 & /\cdot 1 & & /\cdot(-1)
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1
\end{array}\right)
\qquad
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = K^{-1}
$$

Also:

$$
\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \\ \tilde{\gamma} \end{pmatrix} = \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}}^{K^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 10 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & -9 \\ -1 & 3 & 12 \end{pmatrix}}_{V} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}}}$$

Anzahl der Multiplikationen: 9

Anzahl der Additionen: 6

$\underline{\underline{15}}$

<u>Fazit:</u> Wenn Tausende von Punkten transformiert werden sollen, ist der zweite Weg über die Berechnung der kompakten vollständigen Transformationsmatrix V der effizienteste Weg ($\rightsquigarrow$ Matrix-Multiplication-Engines).

Aufgabe (baryzentr. Koordinatentransformation)

Der Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ habe die baryzentrischen Koordinaten $\alpha := -4$, $\beta := 2$, $\gamma := 3$ bezüglich der Dreiecksecken

$$\vec{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{c} := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die baryzentrischen Koordinaten $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ bezüglich des neuen Dreiecks

$$\vec{p} := \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} := \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \vec{r} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung

$\vec{x}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}} = -4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \boxed{= \tilde{\alpha}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \tilde{\beta}\begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix} + \tilde{\gamma}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{1} = -4 + 2 + 3 \qquad \boxed{= \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + \tilde{\gamma}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 5 & -7 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \\ \tilde{\gamma} \end{pmatrix}$$

Wird durch letzte Zeile realisiert!

$$\begin{array}{cccc} \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} & \tilde{\gamma} & \\ 1 & -4 & -1 & -1 \\ \boxed{5} & -7 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad /\cdot(-5) \quad + \qquad /\cdot(-1) \quad +$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 13 & 5 & 7 \\ 0 & \boxed{5} & 2 & 2 \end{array} \qquad /\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & -1 & -1 & (1) \\ 0 & 13 & 5 & 7 & (2) \\ 0 & 0 & \frac{1}{13} & -\frac{9}{13} & (3) \end{array}$$

Aufrollen von unten:

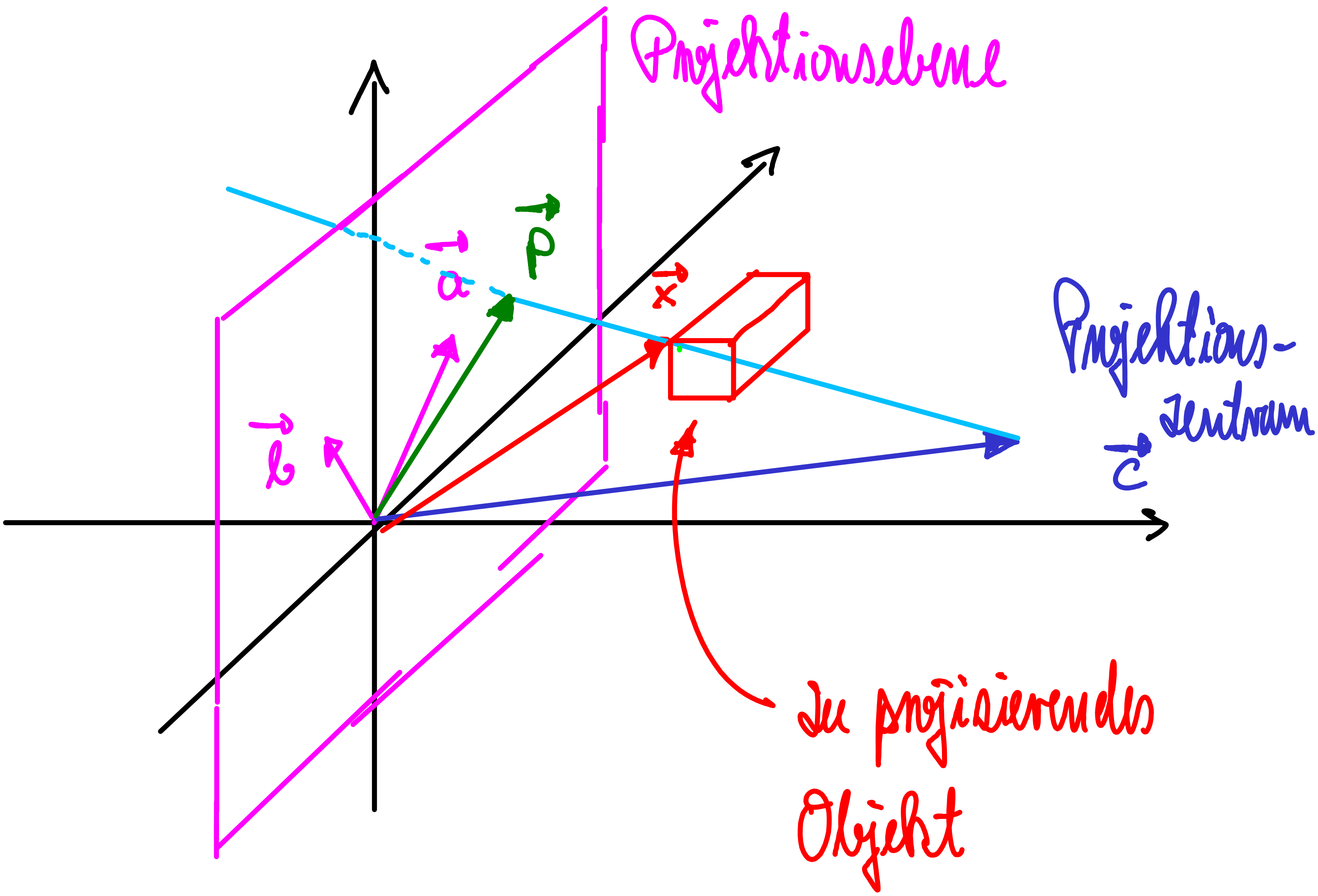
(3) $\frac{1}{13}\tilde{\gamma} = -\frac{9}{13} \implies \underline{\underline{\tilde{\gamma} = -9}}$

(2) $13\tilde{\beta} + 5\cdot(-9) = 7 \implies \underline{\underline{\tilde{\beta} = 4}}$

(1) $\tilde{\alpha} - 4\cdot 4 - 1\cdot(-9) = -1 \implies \underline{\underline{\tilde{\alpha} = 6}}$

Also lauten die neuen Koord. $\underline{\underline{\tilde{\alpha} = 6,\ \tilde{\beta} = 4,\ \tilde{\gamma} = -9.}}$

Zentralprojektion



Aufgabe

Suche die Zentralprojektion $\vec{p}$ des Punktes $\vec{x} := (1,2,3)^T$ in die durch $\vec{a} := (0,1,2)^T$ und $\vec{b} := (1,-1,0)^T$ gegebene Projektionsebene durch das Projektionszentrum $\vec{c} := (-1,2,1)^T$.

$$\vec{p} = \boxed{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{x} + \gamma\left(\vec{c} - \vec{x}\right)}$$ lin. Gls.

$$\alpha\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \gamma\left(\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{array}{cccc} \alpha & \beta & \gamma & \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ \boxed{1} & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{array}$$

tauschen!

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ \boxed{0} & 1 & 2 & 1 \\ \boxed{2} & 0 & 2 & 3 \end{array}$$

$/\cdot(-2)$ +

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & -1 \end{array}$$

$/\cdot(-2)$ +

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{array}$$

Aufrollen von unten: $\underline{\underline{\gamma = \frac{3}{2}, \ \beta = -2, \ \alpha = 0}}$

Also ergibt sich $\vec{p}$ zu

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

⌜ <u>Probe:</u> Setze α und β in die Ebenengleichung ein! ⌟

<u>Aufgabe (zur Zentralprojektion)</u>

$$\vec{a} := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

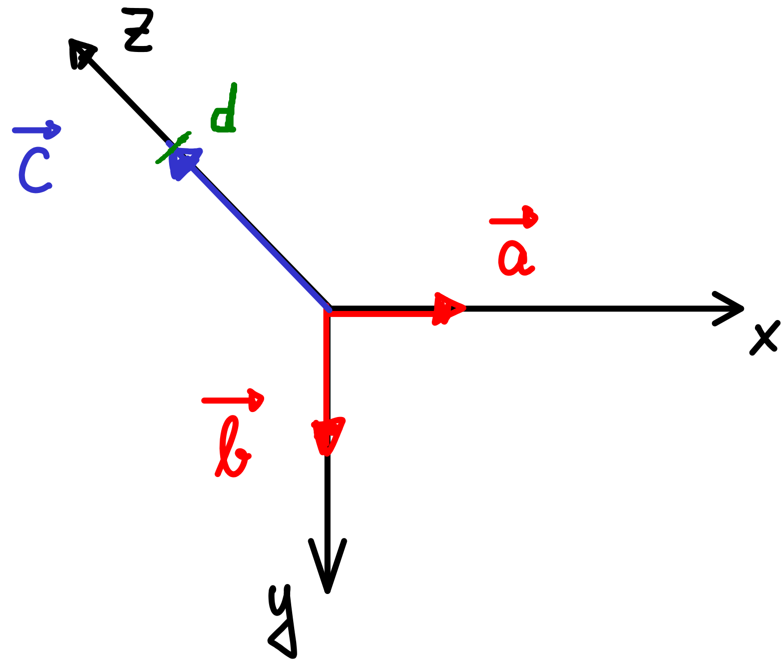
Suche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\vec{p} = \boxed{\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{x} + \gamma (\vec{c} - \vec{x})} \quad \text{lin. Gls.}$$

$$\begin{array}{cccc|l} \alpha & \beta & \gamma & & \\ -1 & 1 & 0 & 1 & \multirow{2}{*}{$\left.\right\}$ nicht lösbar!} \\ -1 & 1 & 0 & 2 & \\ 2 & -1 & 4 & 3 & \end{array}$$

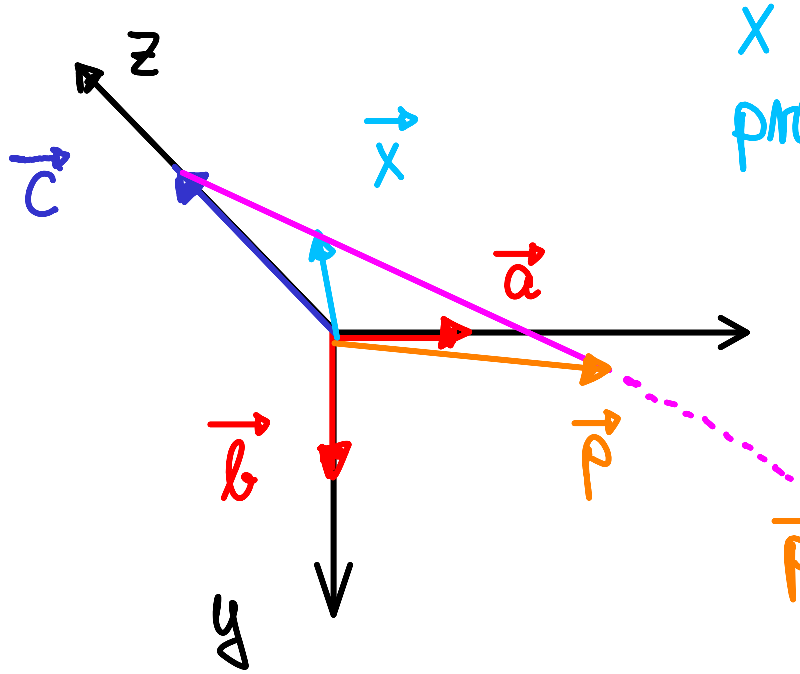
Also liegt $\vec{x}$ in der Verschwindungsebene und ist somit <u>nicht</u> projizierbar.

Finale Aufgabe zur Zentralprojektion (Standard-Setup)



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$$

$\vec{x}$ beliebiger zu projizierender Vektor



$\vec{p}$ projizierter Vektor

$$\vec{p} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{c} + \gamma(\vec{c} - \vec{x})$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ d-x_3 \end{pmatrix}$$

α	β	γ		
1	0	x_1	0	(1)
0	1	x_2	0	(2)
0	0	x_3-d	d	(3)

$$(3) \quad (x_3-d)\gamma = d \implies \underline{\underline{\gamma = \frac{d}{x_3-d}}} \qquad (x_3 \neq d)$$

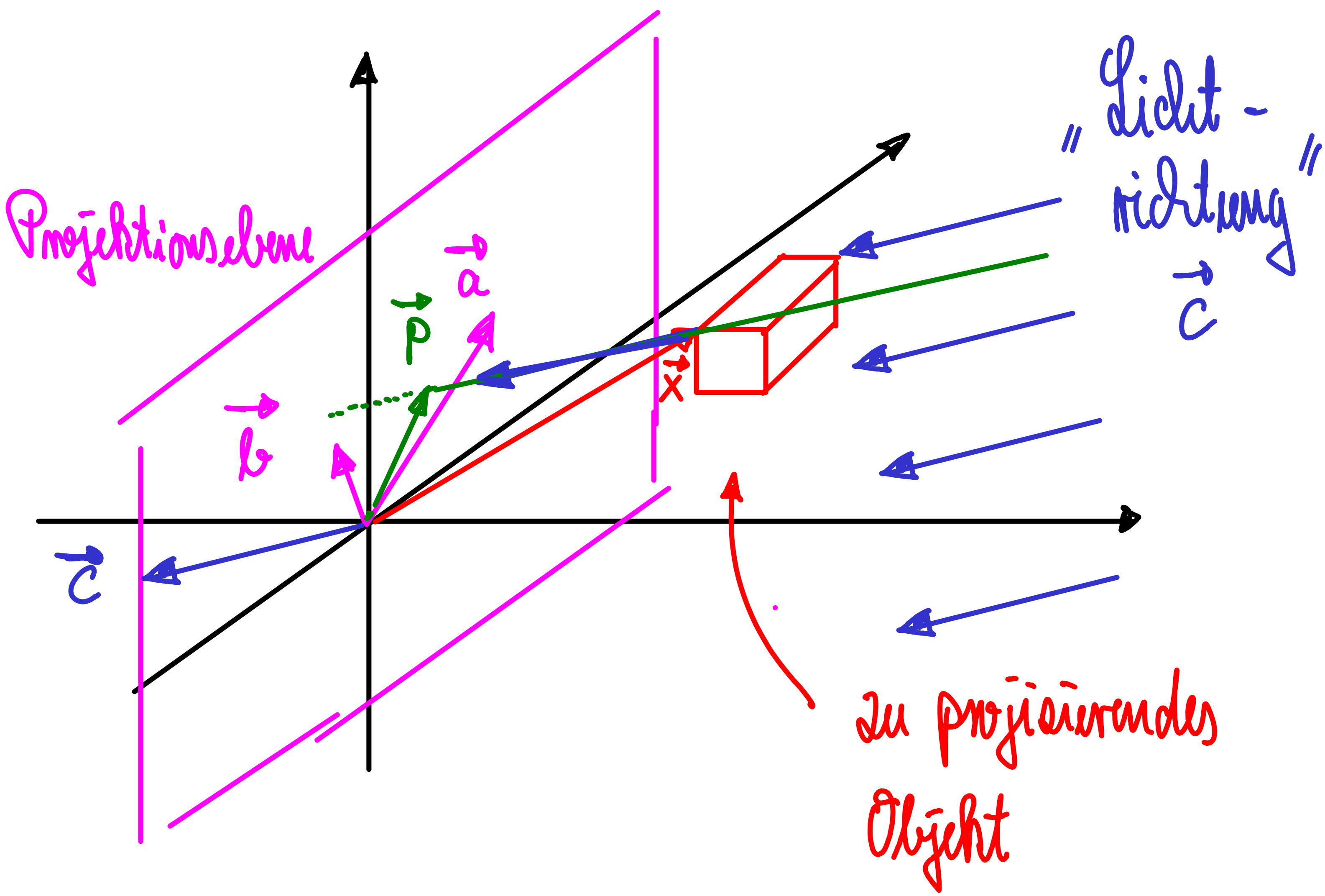
Also ergibt sich für $\vec{p}$:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \frac{d}{x_3-d} \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ d-x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 d}{d-x_3} \\ \frac{x_2 d}{d-x_3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{1-\frac{x_3}{d}} \\ \frac{x_2}{1-\frac{x_3}{d}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Komplexität:</u>

Drei Divisionen und eine Subtraktion pro zentraler Projektion!

Parallelprojektion



Aufgabe (Parallelprojektion)

Suche die Parallelprojektion $\vec{p}$ des Vektors $\vec{x} := (1,2,3)^T$ in die durch $\vec{a} := (1,1,3)^T$ und

$\vec{b} := (1,2,1)^T$ aufgespannte Projektionsebene bei vorgegebener Richtung $\vec{c} := (2,5,1)^T$.

Lösung

$$\vec{p} = \boxed{\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} = \vec{x} + \gamma\,\vec{c}}$$ lin. Gls.

$$\begin{array}{cccc|l}
\alpha & \beta & \gamma & & \\
1 & 1 & -2 & 1 & /\cdot(-1) \quad /\cdot(-3) \\
\boxed{1} & 2 & -5 & 2 & + \\
\boxed{3} & 1 & -1 & 3 & + \\
\hline
1 & 1 & -2 & 1 & \\
0 & 1 & -3 & 1 & /\cdot 2 \\
0 & \boxed{-2} & 5 & 0 & + \\
\hline
1 & 1 & -2 & 1 & (1) \\
0 & 1 & -3 & 1 & (2) \\
0 & 0 & -1 & 2 & (3) \\
\hline
\end{array}$$

Aufrollen von unten:

(3) $-\gamma = 2 \implies \underline{\underline{\gamma = -2}}$

Das reicht zum Lösen des Problems. Setze $\mu = -2$ in die Geradengleichung ein:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

Nur Ergänzung, <u>nicht klausurrelevant:</u>

Alternativ könnte man das Problem auch wie folgt angehen: Suche Projektionsmatrix P mit folgenden Eigenschaften:

$$P\vec{a} = 1 \cdot \vec{a} \qquad P\vec{b} = 1 \cdot \vec{b} \qquad P\vec{c} = 0 \cdot \vec{c}$$

Also hat P den doppelten EW 1 mit EVen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sowie den einfachen EW 0 mit EV $\vec{c}$. Damit kann man P auf Diagonalgestalt transformieren, und zwar gemäß:

$$\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}^{-1} P \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich P als:

$$P = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{\text{vollst. Gauß Alg.}}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc|l}
1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \mid\cdot(-1) \quad \mid\cdot(-3) \\
\boxed{1} & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 & \leftarrow + \\
\boxed{3} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \leftarrow + \\
\hline
1 & \boxed{1} & 2 & 1 & 0 & 0 & \leftarrow + \\
0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & \mid\cdot 2 \quad \mid\cdot(-1) \\
0 & \boxed{-2} & -5 & -3 & 0 & 1 & \leftarrow + \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \mid\cdot(-3) \quad \mid\cdot 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 14 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{array}$$

inv. Matrix

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 14 & -5 & -3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 14 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -4 & -2 \\ 25 & -9 & -5 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit P können wir nun die Parallelprojektion von $\vec{x} = (1,2,3)^T$ erneut sehr schnell berechnen:

$$\vec{p} = P\vec{x} = \begin{pmatrix} 11 & -4 & -2 \\ 25 & -9 & -5 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11-8-6 \\ 25-18-15 \\ 5-4-0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

Was ergibt sich bei Projektion von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$?

$$\vec{p} = P\vec{a} = \begin{pmatrix} 11 & -4 & -2 \\ 25 & -9 & -5 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\vec{p} = P\vec{b} = \begin{pmatrix} 11 & -4 & -2 \\ 25 & -9 & -5 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\vec{p} = P\vec{c} = \begin{pmatrix} 11 & -4 & -2 \\ 25 & -9 & -5 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

Bemerkung: Die Berechnung der Projektionsmatrix P macht Sinn, wenn Tausende von Punkten zu projizieren sind: $\rightsquigarrow$ einmal P berechnen $\rightsquigarrow$ dann schnelle Matrix-Vektor-Multiplikation für Parallelprojektion.