Vorlesung

Vektorraum $\mathbb{Z}_7^3$

$$\mathbb{Z}_7^3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{Z}_7 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$4 \odot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Basis im $\mathbb{Z}_7^3$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\dim \mathbb{Z}_7^3 = 3$$

$$|\mathbb{Z}_7^3| = |\mathbb{Z}_7|^3 = 7^3$$ „Kardinalität“

Untervektorraum von $\mathbb{Z}_7^3$:

z.B. $\quad U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{Z}_7 \right\}$

$$\dim U = \underline{\underline{2}}$$

$$|U| = 7^2 = \underline{\underline{49}}$$

Beispiel zur Analyse einer linearen Abbildung

$L : \mathbb{Z}_7^4 \longrightarrow \mathbb{Z}_7^4$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

als $L : \vec{x} \longmapsto A\,\vec{x}$.

Bestimme zunächst alle Elemente aus $\mathbb{Z}_7^4$, die durch L auf den Nullvektor abgebildet werden. Man nennt die Gesamtheit dieser Elemente den **Kern von L**, kurz **Kern(L)**.

Bestimme $\vec{x} \in \mathbb{Z}_7^4$ mit $A\,\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 3 & 6 & 0 \end{array} \quad / \odot 3$$

1	5	1	6	0
4	3	2	5	0
5	3	5	1	0
6	3	3	6	0

$/\odot 3$ $\oplus$ $/\odot 2$ $\oplus$ $/\odot 1$ $\oplus$

1	5	1	6	0
0	4	5	2	0
0	6	0	6	0
0	1	4	5	0

$/\odot 2$

1	5	1	6	0
0	1	3	4	0
0	6	0	6	0
0	1	4	5	0

$/\odot 1$ $\oplus$ $/\odot 6$ $\oplus$

1	5	1	6	0
0	1	3	4	0
0	0	3	3	0
0	0	1	1	0

$/\odot 5$

1	5	1	6	0
0	1	3	4	0
0	0	1	1	0
0	0	1	1	0

$/\odot 6$ $\oplus$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 5 & 1 & 6 & 0 \\
0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}
$$

Aufrollen von unten:

(4) $0 \odot x_4 = 0$, also $x_4 := s \in \mathbb{Z}_7$ bel.

(3) $x_3 \oplus s = 0 \implies x_3 = -s = 6 \odot s$

(2) $x_2 \oplus 3 \odot 6 \odot s \oplus 4 \odot s = 0 \implies$

$$x_2 = -s = 6 \odot s$$

(1) $x_1 \oplus 5 \odot 6 \odot s \oplus 6 \odot s \oplus 6 \odot s = 0 \implies$

$$x_1 = 0$$

Also:

$$\mathbb{L} = \mathrm{Kern}(L) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \odot s \\ 6 \odot s \\ s \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{Z}_7 \right\}$$

$$= \left\{ s \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{Z}_7 \right\}$$

Untervektorraum des Definitionsber. von L

$\underline{\underline{\dim \operatorname{Kern}(L) = 1}}$ (Anzahl frei wählbarer Param.)

$$\underline{\underline{\mathcal{B}_{\operatorname{Kern}(L)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}}$$ (Basis von Kern(L))

Bestimmung einer Basis von Bild (L), also des Spanns der Spaltenvektoren:

„Schreibe Spaltenvektoren zeilenweise in Matrix"

$$\begin{array}{cccc|l} 5 & 4 & 5 & 6 & \odot 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & \\ 5 & 2 & 5 & 3 & \\ 2 & 5 & 1 & 6 & \\ \hline 1 & 5 & 1 & 4 & /\odot 3 \quad /\odot 2 \quad /\odot 5 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & \oplus \\ 5 & 2 & 5 & 3 & \oplus \\ 2 & 5 & 1 & 6 & \oplus \\ \hline 1 & 5 & 1 & 4 & \\ 0 & 4 & 6 & 1 & /\odot 2 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & \\ 0 & 2 & 6 & 5 & \\ \hline 1 & 5 & 1 & 4 & \\ 0 & 1 & 5 & 2 & /\odot 2 \quad /\odot 5 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & \oplus \\ 0 & 2 & 6 & 5 & \oplus \\ \hline \end{array}$$

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 5 & 1 & 4 \\
0 & 1 & 5 & 2 \\
0 & 0 & 3 & 1 \\
0 & 0 & \boxed{3} & 1 \\
\hline
1 & 5 & 1 & 4 \\
0 & 1 & 5 & 2 \\
0 & 0 & 3 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$/ \odot -1$ bzw. $\odot 6$

$\oplus$

(Nicht-0-Zeilen)

Also: $\dim \operatorname{Bild}(L) = 3$

Konvention: $\operatorname{Rang}(L) := \dim \operatorname{Bild}(L)$.

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Bild}(L)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Basis von Bild(L)

$$\operatorname{Bild}(L) = \operatorname{Spann}_{\mathbb{Z}_7} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Untervektorraum des Wertebereichs von L

Beobachtung:

$$\underbrace{\dim \operatorname{Bild}(L)}_{3} + \underbrace{\dim \operatorname{Kern}(L)}_{1} = \underbrace{\dim \mathbb{Z}_7^4}_{4}$$

„Dimensionsatz"

Übung

<u>Aufgabe (ein wenig Wiederholung)</u>

Gegeben sei der Körper $\mathbb{Z}_7$. Berechnen Sie

(a) $\dfrac{6 \oplus 4 \odot 3}{5 \ominus 6^{-1}}$,

(b) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$.

<u>zu (a)</u>

$$\frac{6 \oplus 4 \odot 3}{5 \ominus 6^{-1}} =$$

$$= \frac{6 \oplus 5}{5 \ominus 6} = \frac{4}{5 \oplus -6} = \frac{4}{5 \oplus 1}$$

$$= 4 \odot 6^{-1} = 4 \odot 6 = \underline{\underline{3}}$$

Zu (b)

Vollständiger Gauß-Algorithmus:

$$
\begin{array}{cc|cc|l}
4 & 2 & 1 & 0 & \odot 2 \\
1 & 3 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 4 & 2 & 0 & \odot 6 \\
\boxed{1} & 3 & 0 & 1 & \oplus \\
\hline
1 & 4 & 2 & 0 & \\
0 & 6 & 5 & 1 & \odot 6 \\
\hline
1 & \boxed{4} & 2 & 0 & \oplus \\
0 & 1 & 2 & 6 & \odot 3 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 4 & \\
0 & 1 & 2 & 6 &
\end{array}
$$

$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = A^{-1}$

Probe: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 4 \oplus 4 & 2 \oplus 5 \\ 1 \oplus 6 & 4 \oplus 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark \quad \text{o.K.}$$

Aufgabe

Gegeben sei die lineare Abbildung $L : \mathbb{Z}_{11}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}_{11}^3$ durch Angabe ihrer Wirkung auf die Einheitsbasis in $\mathbb{Z}_{11}^3$, konkret

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}10\\1\\3\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}0\\6\\3\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Kern(L) und Bild(L) sowie deren Basen und Dimensionen.

Um Kern(L) zu berechnen, ist das lineare Gleichungssystem

linear!

$$L(\vec{x}) = L\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = L\left(x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \oplus x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \oplus x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$= \underbrace{x_1\begin{pmatrix}10\\1\\3\end{pmatrix} \oplus x_2\begin{pmatrix}0\\6\\3\end{pmatrix} \oplus x_3\begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}10 & 0 & 2\\1 & 6 & 4\\3 & 3 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

zu lösen:

$$\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 8 & 0 \end{array} \quad \odot\, 10$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 9 & 0 & /\odot 10 \quad /\odot 8 \\ \boxed{1} & 6 & 4 & 0 & \oplus \\ \boxed{3} & 3 & 8 & 0 & \oplus \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 9 & 0 & \\ 0 & 6 & 6 & 0 & /\odot 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 9 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & /\odot 8 \\ 0 & \boxed{3} & 3 & 0 & \oplus \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 9 & 0 & (1) \\ 0 & 1 & 1 & 0 & (2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (3) \end{array}$$

Aufrollen von unten:

(3): $0 \odot x_3 = 0$, also $\underline{\underline{x_3 = s}} \in \mathbb{Z}_{11}$ beliebig.

(2): $x_2 \oplus s = 0$, also $\underline{\underline{x_2 = -s = 10 \odot s}}$

(1): $x_1 \oplus 9 \odot s = 0$, also $\underline{\underline{x_1 = -9 \odot s = 2 \odot s}}$

$$\underline{\underline{\operatorname{Kern}(L)}} = \left\{ s \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{Z}_{11} \right\}$$

$$= \underline{\underline{\left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{Z}_{11} \right\}}} .$$

$$\underline{\underline{\mathcal{B}_{\mathrm{Kern}(L)} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}}, \quad \underline{\underline{\dim \mathrm{Kern}(L) = 1}}.$$

$$\underline{\underline{\mathrm{Rang}(L)}} = \dim \mathbb{Z}_{11}^3 - \dim \mathrm{Kern}(L) = 3 - 1 = \underline{\underline{2}}.$$

Zur Bestimmung von Bild (L) wird der Spann der Bilder der Einheitsvektoren untersucht:

$$\begin{array}{ccc|l} 10 & 1 & 3 & \cdot 10 \\ 0 & 6 & 3 & \\ 2 & 4 & 8 & \\ \hline 1 & 10 & 8 & \cdot 9 \\ \boxed{0} & 6 & 3 & \\ \boxed{2} & 4 & 8 & + \\ \hline 1 & 10 & 8 & \\ 0 & 6 & 3 & / \cdot 10 \\ 0 & \boxed{6} & 3 & + \\ \hline 1 & 10 & 8 & \\ 0 & 6 & 3 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline \end{array}$$

(Hätte man hier auch ohne Rechnung erledigen können!)

Also: $\underline{\underline{\mathrm{Bild}(L) = \mathrm{Spann}_{\mathbb{Z}_{11}}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \right)}}$

$$\underline{\underline{\mathcal{B}_{\mathrm{Bild}(L)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}}}$$

Aufgabe

Gegeben sei die lineare Abbildung $L: \mathbb{Z}_{13}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}_{13}^3$ mittels einer Matrix $A \in \mathbb{Z}_{13}^{3\times 2}$ gemäß

$$L(\vec{x}) := A\vec{x} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 12 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Kern (L) und Bild (L) sowie deren Basen und Dimensionen.

Um Kern (L) zu berechnen ist das lineare Gleichungs-system $L(\vec{x}) = A\vec{x} = \vec{o}$ zu lösen:

$$\begin{array}{ccc|l}
1 & 2 & 0 & \odot 9 \quad / \odot 12 \\
\boxed{4} & 12 & 0 & \oplus \\
1 & 1 & 0 & \quad\quad\;\; \oplus \\
\hline
1 & 2 & 0 & \\
0 & 4 & 0 & / \odot 10 \\
0 & 12 & 0 & \\
\hline
1 & 2 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & / \odot 1 \\
0 & \boxed{12} & 0 & \oplus \\
\hline
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aufrollen des Endsystems von unten liefert offenbar:

$$\underline{\underline{\mathrm{Kern}(L) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}}, \quad \underline{\underline{\dim \mathrm{Kern}(L) = 0}},$$

$$\underline{\underline{\mathcal{B}_{\mathrm{Kern}(L)} = \emptyset}}.$$

Also: $\underline{\underline{\mathrm{Rang}(L)}} = \dim \mathbb{Z}_{13}^2 - \dim \mathrm{Kern}(L) = 2 - 0 = \underline{\underline{2}}.$

$$\underline{\underline{\mathrm{Bild}(L) = \mathrm{Spann}_{\mathbb{Z}_{13}}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)}}.$$

$$\underline{\underline{\mathcal{B}_{\mathrm{Bild}(L)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}}.$$

Aufgabe

Gegeben sei die lineare Abbildung $L: \mathbb{Z}_7^3 \longrightarrow \mathbb{Z}_7^2$ mittels einer Matrix $A \in \mathbb{Z}_7^{2\times 3}$ gemäß

$$L(\vec{x}) := A\vec{x} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Kern(L) und Bild(L) sowie deren Basen und Dimensionen.

Um Kern(L) zu berechnen ist das lineare Gleichungssystem $L(\vec{x}) = A\vec{x} = \vec{o}$ zu lösen:

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 2 & 3 & 0 & /\odot 3 \\ \boxed{4} & 6 & 3 & 0 & \hookleftarrow \oplus \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 & (1) \\ 0 & 5 & 5 & 0 & (2) \\ \hline \end{array}$$

Aufrollen von unten:

(2) : $\quad 5 \odot x_2 \oplus 5 \odot x_3 = 0$, also

$\underline{\underline{x_3 = s \in \mathbb{Z}_7}}$ beliebig und $\underline{\underline{x_2 = -s}}$.

(1): $x_1 \oplus 2 \odot -s \oplus 3 \odot s = 0$, also $\underline{\underline{x_1 = -s}}$.

Somit:

$$\underline{\underline{\mathrm{Kern}(L)}} = \left\{ s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{Z}_7 \right\}$$

$$= \underline{\underline{\left\{ s \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{Z}_7 \right\}}}.$$

$$\underline{\underline{\mathcal{B}_{\mathrm{Kern}(L)} = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}}, \quad \underline{\underline{\dim \mathrm{Kern}(L) = 1}}.$$

$$\underline{\underline{\mathrm{Rang}(L)}} = \dim \mathbb{Z}_7^3 - \dim \mathrm{Kern}(L) = 3 - 1 = \underline{\underline{2}}.$$

Zur Bestimmung einer Basis von Bild (L) muss man nun nur zwei linear unabhängige Spaltenvektoren von A auswählen, also z. B.

$$\underline{\underline{\mathcal{B}_{\mathrm{Bild}(L)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}}}.$$

$$\underline{\underline{\mathrm{Bild}(L) = \mathrm{Spann}_{\mathbb{Z}_7}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \right)}}.$$

Aufgabe

Gegeben sei die lineare Abbildung $L : \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^3$ mittels einer Matrix $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ gemäß

$$L(\vec{x}) := A\vec{x} := \begin{pmatrix} -7 & 3 & -1 \\ 49 & -22 & 6 \\ -21 & 10 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Kern(L) und Bild(L) sowie deren Basen und Dimensionen.

Um Kern(L) zu berechnen ist das lineare Gleichungssystem $L(\vec{x}) = A\vec{x} = \vec{0}$ zu lösen:

$$\begin{array}{rrr|r|l} -7 & 3 & -1 & 0 & \mid\cdot 7 \quad \mid\cdot(-3) \\ 49 & -22 & 6 & 0 & + \\ -21 & 10 & -2 & 0 & \qquad\quad + \\ \hline -7 & 3 & -1 & 0 & \\ 0 & -1 & -1 & 0 & \mid\cdot 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & + \\ \hline -7 & 3 & -1 & 0 & (1) \\ 0 & -1 & -1 & 0 & (2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (3) \end{array}$$

Aufrollen von unten:

(3): $0 x_3 = 0$, also $\underline{\underline{x_3 = s}} \in \mathbb{Q}$ beliebig.

(2): $-x_2 - s = 0$, also $\underline{\underline{x_2 = -s}}$.

(1): $-7x_1 - 3s - s = 0$, also $\underline{\underline{x_1 = -\frac{4}{7}s}}$.

$$\underline{\underline{\operatorname{Kern}(L) = \left\{ s \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{Q} \right\}}}.$$

$$\underline{\underline{\mathcal{B}_{\operatorname{Kern}(L)} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}}}, \quad \underline{\underline{\dim \operatorname{Kern}(L) = 1}}.$$

$$\underline{\underline{\operatorname{Rang}(L)}} = \dim \mathbb{Q}^3 - \dim \operatorname{Kern}(L) = 3 - 1 = \underline{\underline{2}}.$$

$$\underline{\underline{\operatorname{Bild}(L) = \operatorname{Spann}_{\mathbb{Q}}\left(\left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ 49 \\ -21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \right)}}.$$

$$\underline{\underline{\mathcal{B}_{\operatorname{Bild}(L)} = \left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ 49 \\ -21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}}}.$$