Fachhochschule Dortmund
University of Applied Sciences and Arts

Studiengang Informatik

Prüfungsfach: Mathematik für Informatik 2 (dual)
Prüfer: Prof. Dr. Burkhard Lenze
Prüfungstermin: 14.02.2023
Dauer der Prüfung: 90 Minuten
Hilfsmittel: Ein beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt

Name, Vorname: ______________________________

Matrikel/Platz: __________________ / __________

Unterschrift: ______________________________

Hinweise:

- Füllen Sie zunächst das Deckblatt aus und unterschreiben Sie es!
- Es gibt insgesamt 6 Aufgaben und maximal 105 Punkte sind erreichbar!

- Verwenden Sie für die Lösungen nur die gegebenen Blätter!
- Verwenden Sie einen dokumentenechten Stift (keinen Bleistift)!
- Lassen Sie bitte alle Blätter im zusammengehefteten Zustand!
- Geben Sie bei allen Aufgaben den kompletten Lösungsweg an!
- Ohne den zugehörigen Lösungsweg gibt es stets nur 0 Punkte!

Bewertungsschlüssel:

Punkte	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50	< 50
Note	1.0	1.3	1.7	2.0	2.3	2.7	3.0	3.3	3.7	4.0	5.0

Ergebnis:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6		**Summe**	**Note**
maximale Punkte	15	15	20	20	15	20		105	
erhaltene Punkte									

$$= \frac{-12-16i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{-12-12i-16i-16i^2}{1-i^2} = \frac{4-28i}{2} = \underline{\underline{2-14i}}$$

Name: ________________ Vorname: ________________

Aufgabe 1 *Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:*

(a) $\frac{(2-4i)^2}{1-i}$, $= \frac{4-16i+(4i)^2}{1-i} = \frac{4-16i-16}{1-i} = \frac{-12-16i}{1-i} =$ 5 Punkte

(b) $\frac{(-3i)^2}{(1+i)^2}$, $= \frac{9i^2}{1+2i+i^2} = \frac{9i^2}{2i} = \underline{\underline{\frac{9}{2}i}}$ 5 Punkte

(c) $(-2i)^7$. $= (-2)^7 \cdot i^7 = -128\, \underbrace{i^4}_{=1} \cdot \underbrace{i^3}_{=-i} = \underline{\underline{128i}}$ 5 Punkte

Lösung:

```
(a)
(2-4i)^2/(1-i)  =  (-12-16i)*(1+i)/2  =  (4-28i)/2  =  2-14i

(b)
(-3i)^2/(1+i)^2  =  -9/2i  =  9i/2

(c)
(-2i)^7  =  -128i^3  =  128i
```

Rate: NST $z_1 = 1$.

Abdivision von $(x - z_1) = (x-1)$:

$$(x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 22x - 15) : (x-1) = x^3 - x^2 - 7x + 15$$
$$-(x^4 - x^3)$$
$$-x^3 - 6x^2$$
$$-(-x^3 + x^2)$$
$$-7x^2 + 22x$$
$$-(-7x^2 + 8x)$$
$$15x - 15$$
$$-(15x - 15)$$
$$0$$

$$q(x) := x^3 - x^2 - 7x + 15$$

$$q(-3) = -27 - 9 + 21 + 15 = 0 \checkmark$$

NST $z_2 = -3$, Abdivision von $(x - z_2) = (x+3)$:

$$(x^3 - x^2 - 7x + 15) : (x+3) = x^2 \underbrace{-4x}_{p} \underbrace{+5}_{q}$$
$$-(x^3 + 3x^2)$$
$$-4x^2 - 7x$$
$$-(-4x^2 - 12x)$$
$$5x + 15$$
$$-(5x + 15)$$
$$0$$

$$z_{3/4} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 5}$$
$$= 2 \pm \sqrt{-1} = \underline{\underline{2 \pm i}}$$

$p(x) = (x-1)(x+3)(x-(2+i))(x-(2-i))$

Name: ________________ Vorname: ________________

Aufgabe 2 *Bestimmen Sie die vollständige Faktorisierung des folgenden Polynoms:* 15 Punkte

$$p(z) := z^4 - 2z^3 - 6z^2 + 22z - 15 \,.$$

$p(1) = 1 - 2 - 6 + 22 - 15 = 0$

Lösung:

```
Rate NST z_1=1

Abdivision von (z-1):

(z^4-2z^3-6z^2+22z-15):(z-1)=z^3-z^2-7z+15
-(z^4 -z^3)
---------
     -z^3-6z^2
   -(-z^3 +z^2)
    ------------
         -7z^2+22z
       -(-7z^2+ 7z)
        -----------
               15z-15
           - (15z-15)
              ---------
                     0

Rate NST z_2=-3
Abdivision von (z+3):

(z^3-z^2-7z+15):(z+3)=z^2-4z+5
-(z^3+3z^2)
--------
   -4z^2-7z
 -(-4z^2-12z)
   ---------
         5z+15
     - (5z+15)
       --------
             0

Mit p/q-Formel oder quadratischer Ergänzung ergibt sich ferner:

z^2-4z+5 = (z-(2-i))*(z-(2+i))

Die Faktorisierung des Polynoms lautet also:

 p(z) = (z-1)*(z+3)*(z-(2-i))*(z-(2+i))
```

1. Schritt: EW berechnen

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -12-\lambda & 10 & -5 \\ -15 & 13-\lambda & -5 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-12-\lambda)(13-\lambda)(3-\lambda) - (-150)(3-\lambda)$$

$$= (3-\lambda)\left((-12-\lambda)(13-\lambda) - (-150)\right)$$

$$= (3-\lambda)(-156+12\lambda-13\lambda+\lambda^2+150)$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2-\lambda-6) = (3-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-3) = 0$$

EW: $\lambda_1 = -2, \ \underbrace{\lambda_2 = \lambda_3 = 3}_{\text{doppelter EW}}$

2. Schritt: EV berechnen

$\lambda_1 = -2$:

$$\begin{pmatrix} -12-(-2) & 10 & -5 \\ -15 & 13-(-2) & -5 \\ 0 & 0 & 3-(-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \\ r_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -10 & 10 & -5 \\ -15 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \\ r_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

z. B. $\vec{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda_2 = \lambda_3 = 3}$

$$\begin{pmatrix} -12-3 & 10 & -5 \\ -15 & 13-3 & -5 \\ 0 & 0 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(2/3)} \\ r_2^{(2/3)} \\ r_3^{(2/3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -15 & 10 & -5 \\ -15 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(2/3)} \\ r_2^{(2/3)} \\ r_3^{(2/3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

z. B. $\vec{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}}}$$

Name: ________________ Vorname: ________________

Aufgabe 3 *Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$,* 20 Punkte

$$A := \begin{pmatrix} -12 & 10 & -5 \\ -15 & 13 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Geben Sie ferner eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{3\times3}$ an, so dass $C^{-1}AC$ Diagonalgestalt hat.

Hinweis: *Ein Eigenwert von A ist doppelt!*

Lösung:

1. Schritt: Aus der Gleichung

$$p(\lambda) \;=\; \det(A-\lambda E) \;=\; \det \begin{pmatrix} -12-\lambda & 10 & -5 \\ -15 & 13-\lambda & -5 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+2) \;=\; 0$$

berechnen sich die Lösungen $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$, also die Eigenwerte von A.
2. Schritt: Aus dem Gleichungssystem

$$(A-\lambda_1 E)\vec{r}^{(1)} = \vec{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} -10 & 10 & -5 \\ -15 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \\ r_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergeben sich alle zu $\lambda_1 = -2$ gehörenden Eigenvektoren zu

$$\vec{r}^{(1)} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \;\; \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\} .$$

Aus dem Gleichungssystem

$$(A-\lambda_{2/3} E)\vec{r}^{(2/3)} = \vec{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} -15 & 10 & -5 \\ -15 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(2/3)} \\ r_2^{(2/3)} \\ r_3^{(2/3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergeben sich alle zu $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ gehörenden Eigenvektoren zu

$$\vec{r}^{(2)} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} , \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \;\; |\alpha| + |\beta| \neq 0 .$$

Die gesuchte Matrix C kann man z.B. erhalten, indem man die Eigenvektoren als Spaltenvektoren in C schreibt, also

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} .$$

$$\mathrm{Kern}(L) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\dim \mathrm{Kern}(L) = 1$$

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Kern}\,L} = \left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\mathrm{Bild}(L) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\6\\3\end{pmatrix}\right\}$$

$$\dim \mathrm{Bild}(L) = 2$$

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Bild}(L)} = \left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\6\\3\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 6 & 4\\ 3 & 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 *Gegeben sei die lineare Abbildung* $\boxed{L:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3}$ *durch Angabe ihrer Wirkung auf die Einheitsbasis im* $\mathbb{R}^3$, *konkret* 20 Punkte

$$\boxed{L((1,0,0)^T) := (-1,1,3)^T}, \quad L((0,1,0)^T) := (0,6,3)^T\ , \quad L((0,0,1)^T) := (2,4,-3)^T\ .$$

Bestimmen Sie $\operatorname{Kern}(L)$ *und* $\operatorname{Bild}(L)$ *sowie eine Basis* $\mathscr{B}_{\operatorname{Kern}(L)}$ *von* $\operatorname{Kern}(L)$ *und eine Basis* $\mathscr{B}_{\operatorname{Bild}(L)}$ *von* $\operatorname{Bild}(L)$. *Geben Sie ferner* $\dim \operatorname{Kern}(L)$ *und* $\dim \operatorname{Bild}(L) = \operatorname{Rang}(L)$ *an.*

Lösung:
Um $\operatorname{Kern}(L)$ zu berechnen, ist das lineare Gleichungssystem

$$x_1(-1,1,3)^T + x_2(0,6,3)^T + x_3(2,4,-3)^T = (0,0,0)^T$$

zu lösen. Als Lösung erhält man

$$\mathbf{L} = \operatorname{Kern}(L) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}\ .$$

Also ist zunächst

$$\dim \operatorname{Kern}(L) = 1$$

und aufgrund der Dimensionsformel

$$\operatorname{Rang}(L) = \dim \operatorname{Bild}(L) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Kern}(L) = 3 - 1 = 2$$

und z.B.

$$\mathscr{B}_{\operatorname{Kern}(L)} := \{(2,-1,1)^T\}$$

eine Basis von $\operatorname{Kern}(L)$. Eine Basis von $\operatorname{Bild}(L)$ kann man schließlich berechnen, indem man die Bilder der Einheitsvektoren zeilenweise mittels Gaußschem Algorithmus reduziert, also

$$\begin{array}{rrrr}
-1 & 1 & 3 & \cdot 2 \\
0 & 6 & 3 & | \\
2 & 4 & -3 & \leftarrow + \\
\hline
-1 & 1 & 3 & \\
0 & 6 & 3 & \cdot(-1) \\
0 & 6 & 3 & \leftarrow + \\
\hline
-1 & 1 & 3 & \\
0 & 6 & 3 & \\
0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

Also gilt z.B.

$$\mathscr{B}_{\operatorname{Bild}(L)} = \{(-1,1,3)^T, (0,6,3)^T\}$$

und

$$\operatorname{Bild}(L) = \operatorname{Spann}_{\mathbb{R}}\{(-1,1,3)^T, (0,6,3)^T\}.$$

Aufgabe 5 *Gegeben sei das algebraische Polynom* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vom Grad* 4,

$$p(x) := 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 3 \ .$$

(a) Geben Sie alle Stammfunktionen von p an. 3 Punkte

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von p und geben Sie explizit an, ob es sich um lokale Maxima oder Minima handelt. 12 Punkte

Lösung:
(a) $P(x) = \frac{3}{5}x^5 + x^4 - 4x^3 + 3x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

(b)

$$\begin{aligned} p(x) &= 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 3 \\ p'(x) &= 12x^3 + 12x^2 - 24x \\ p''(x) &= 36x^2 + 24x - 24 \end{aligned}$$

Weiter folgt aus $p'(x) = 0$ entweder $x = 0$ oder $x = -2$ oder $x = 1$. Damit ergibt sich abschließend

$$\begin{aligned} p''(-2) = 72 > 0 \quad &\Rightarrow \quad lok.\, Min.\, bei \; -2 \\ p''(0) = -24 < 0 \quad &\Rightarrow \quad lok.\, Max.\, bei \; 0 \\ p''(1) = 36 > 0 \quad &\Rightarrow \quad lok.\, Min.\, bei \; 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 6 *Gegeben seien die drei Funktionen*

$f(x) := x^3 - 3x^2 - x + 2,$ $g(x) := x\sin(x),$ $h(x) := x^2\exp(x^3).$

Berechnen Sie:

(a) 2 Punkte

$$(g \circ h)(x) \ ,$$

(b) 8 Punkte

$$f'(x) \ , \ \ g'(x) \ \ \textit{und} \ \ h'(x) \ ,$$

(c) 10 Punkte

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx \ , \ \ \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx \ \ \textit{und} \ \ \int_{0}^{1} h(x)dx \ .$$

Lösung:

(a)

$$g(h(x)) = x^2\exp(x^3)\sin(x^2\exp(x^3)) \ ,$$

(b)

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 1 \ , \ \ g'(x) = \sin(x) + x\cos(x) \ , \ \ h'(x) = 2x\exp(x^3) + 3x^4\exp(x^3) \ ,$$

(c)

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx = -4 \ , \ \ \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = 2\pi \ , \ \ \int_{0}^{1} h(x)dx = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e \ .$$