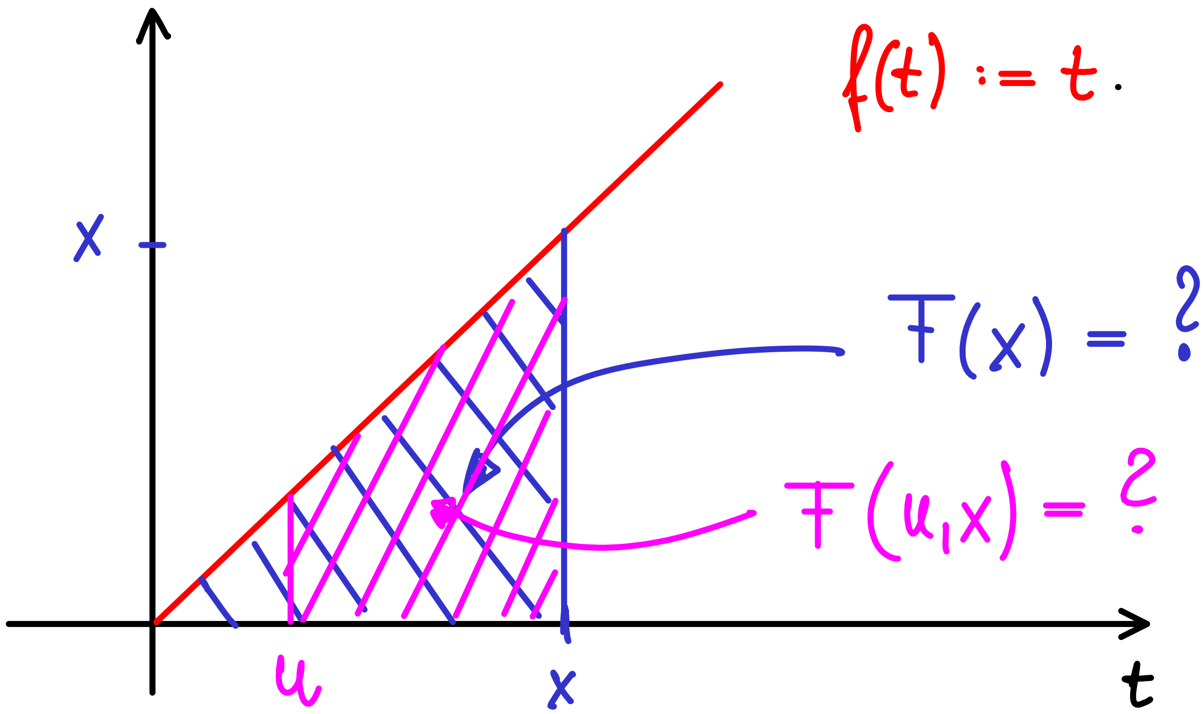
Vorlesung

Motivation zum Integrieren ⇝ Suche von Flächeninhalten unter Graphen von Funktionen:



$F(x) = \frac{1}{2} x \cdot x = \frac{1}{2} x^2$ (Dreiecksfläche)

<u>Beobachtung:</u> $F'(x) = x = f(x)$

$F(u,x) = \frac{1}{2} x \cdot x - \frac{1}{2} u \cdot u = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} u^2$

$=: \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_u^x = \left[F(t) \right]_u^x$

Beispiel zu Stammfunktionen:

$$f(x) = x$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad \text{denn } F'(x) = f(x)$$

Insbesondere:

$$\int_0^4 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 = \frac{1}{2}\cdot 16 - \frac{1}{2}\cdot 0 = \underline{\underline{8}}$$

Alternativ:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5, \quad \text{denn } F'(x) = x$$

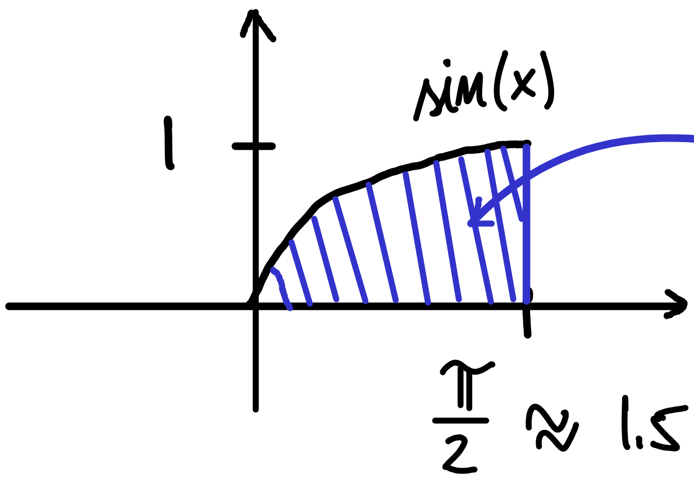
Dann:

$$\int_0^4 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 5\right]_0^4 = \left(\frac{1}{2}\cdot 16 + 5\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 0 + 5\right) = \underline{\underline{8}}$$

Fazit: Der Wert des Integrals ist unabhängig von der Wahl der konkreten Stammfunktion!

Beispiel

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx = ?$$



$F = ?$

$F \approx 1$ (geschätzt!)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx =$$

$$= \left[-\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \underbrace{-\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \left(\underbrace{-\cos(0)}_{=1}\right) = \underline{\underline{1}}$$

Übung

<u>Aufgabe</u> Bestimmen Sie die folgenden Integrale analytisch und geometrisch:

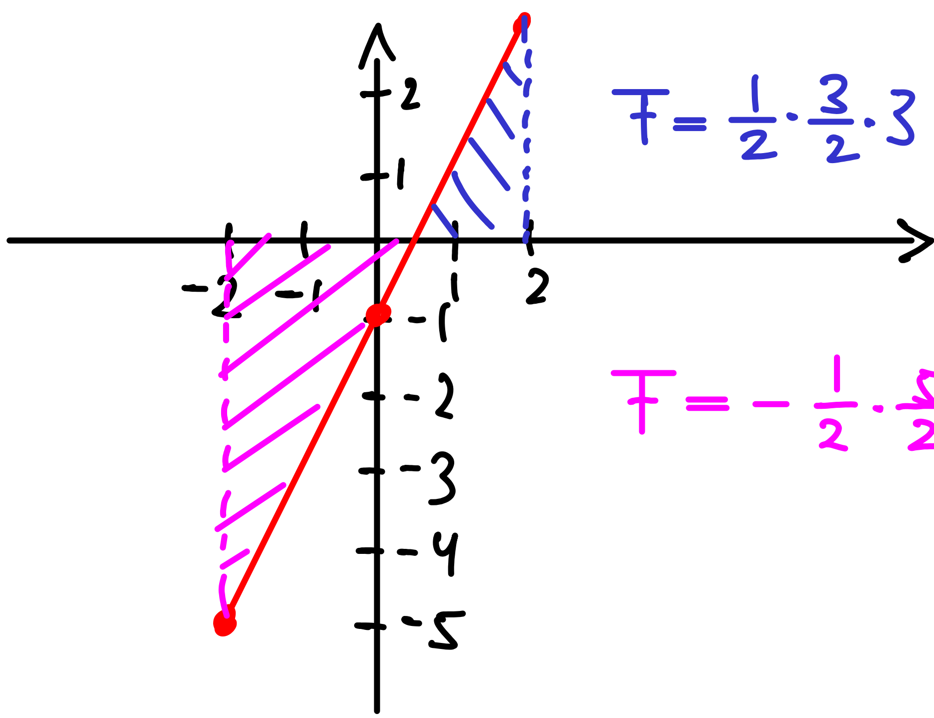
(a) $\int_{-2}^{2} (2x-1)\,dx = ?$

$$\int_{-2}^{2}(2x^1 - x^0)\,dx = \left[\frac{2}{2}x^2 - \frac{1}{1}x^1\right]_{-2}^{2}$$

„Exponent um 1 erhöhen, durch neuen Exponent teilen!"

$$= \left(2^2 - 1\cdot 2\right) - \left((-2)^2 - 1\cdot(-2)\right) = 2 - 6 = \underline{\underline{-4}}$$

<u>Skizze</u>:



$F = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 3 = \frac{9}{4}$

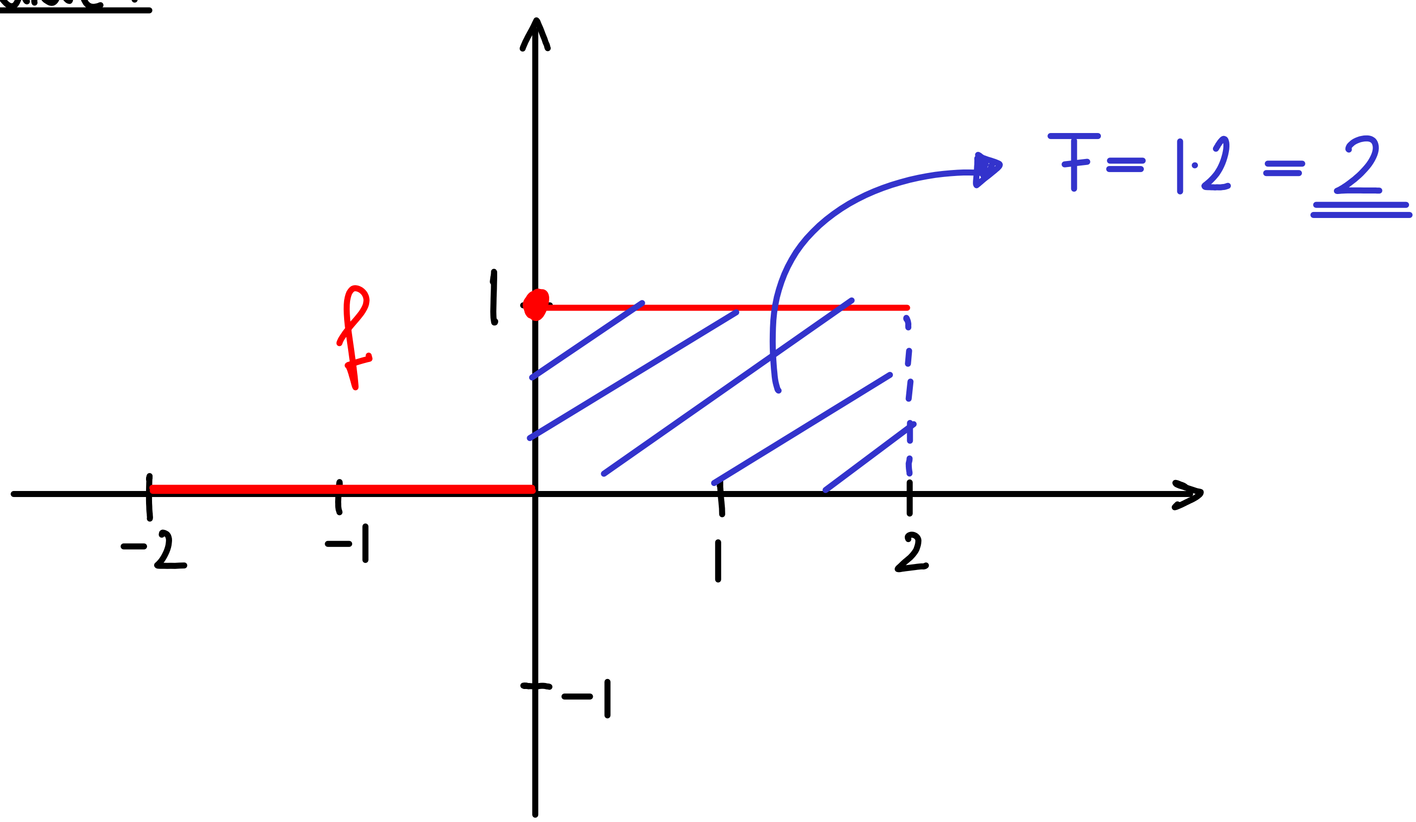
$F = -\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot 5 = -\frac{25}{4}$

(b) $f(x) := \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } x \in [-2,0) \\ 1 & \text{für } x \in [0,2] \end{array} \right\}$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{2} 1\,dx$$

$$= \underbrace{\Big[1\Big]_{-2}^{0}}_{1-1=0} + \underbrace{\Big[x\Big]_{0}^{2}}_{2-0=2} = \underline{\underline{2}}$$

Skizze:



(c) $\displaystyle\int_{-2}^{2} |x+1|\,dx$

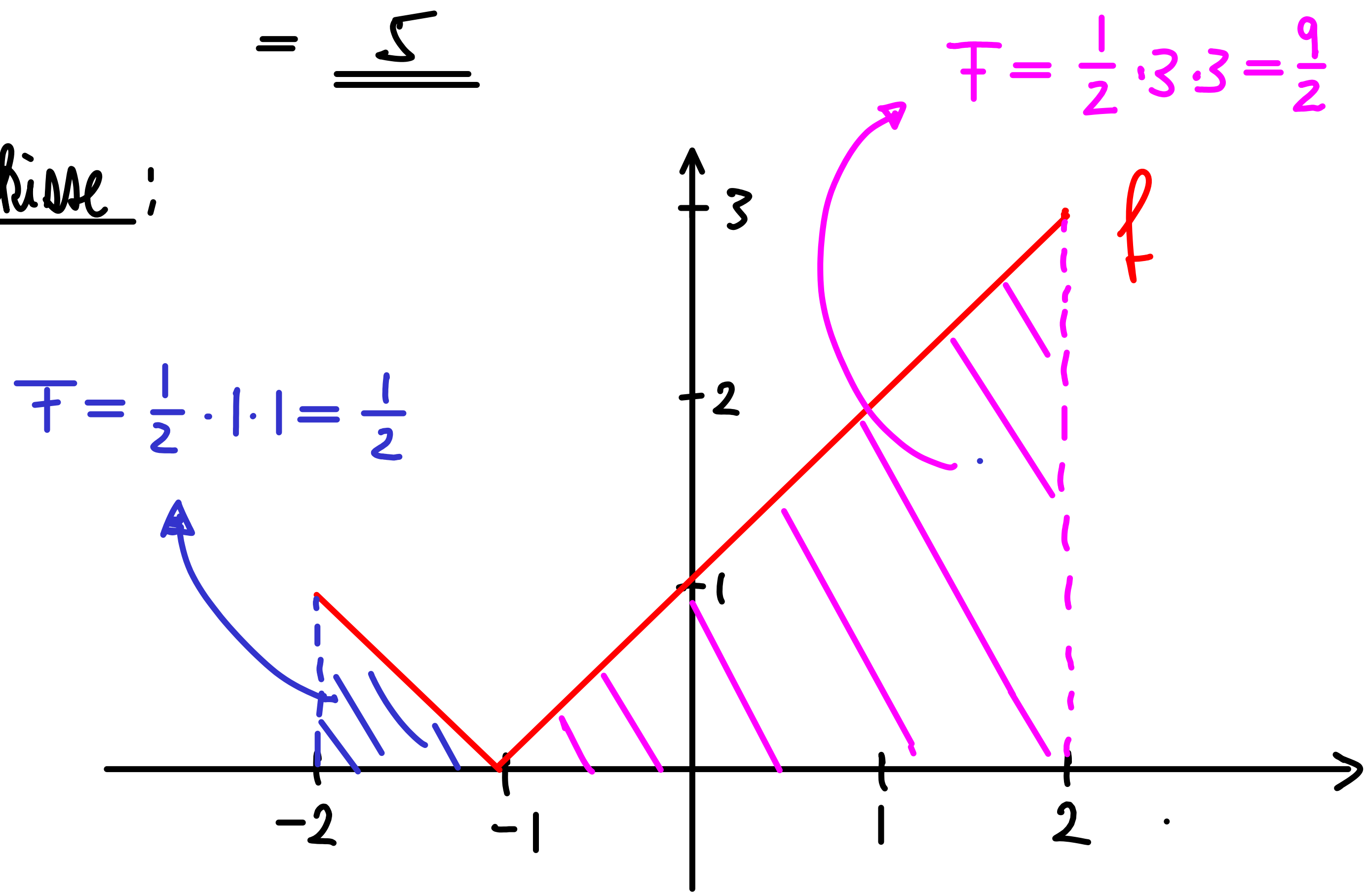
$$= \int_{-2}^{-1} -(x+1)\,dx + \int_{-1}^{2} (x+1)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 - x\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}+1\right) - \left(-2+2\right) + \left(2+2\right) - \left(\frac{1}{2}-1\right)$$

$$= \underline{\underline{5}}$$

Skizze:



(d) $\int_{-2}^{2} \frac{2x}{x^2+5}\,dx$

$$\boxed{\left(\ln(f(x))\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

„Rate Stammfunktion"

$$= \left[\ln\left(x^2+5\right)\right]_{-2}^{2} = \underline{\underline{0}}$$

(e) $\int_{-2}^{2} e^{3x-6}\,dx$

$$= \left[\frac{1}{3}e^{3x-6}\right]_{-2}^{2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3}\left(1-e^{-12}\right)}}$$

Aufgabe

Es seien $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ und $h : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit

$$g(x) \in [c,d] \quad , \; x \in [a,b].$$

Bestimmen Sie nun jeweils <u>eine</u> Stammfunktion für die folgenden Funktionen:

(a) $f(x) := h'(g(x)) \cdot g'(x)$,

(b) $f(x) := 2\, g'(x) \cdot g(x)$,

(c) $f(x) := \dfrac{g'(x)}{g(x)}$, falls $g(x) \neq 0$, $x \in [a,b]$.

(a) $F(x) = h(g(x))$, „Kettenregel"

(b) $F(x) = (g(x))^2$, „Produkt- oder Kettenregel"

(c) $F(x) = \ln(|g(x)|)$. „Kettenregel"

Für (c) sollte man kurz die beiden möglichen Fälle durchspielen. Da g differenzierbar und damit insbesondere stetig ist, folgt aus $g(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$ sofort $g(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$ oder $g(x) < 0$ für alle $x \in [a,b]$. Also:

$\underline{g(x) > 0:}$

$$F'(x) = \left(\ln(|g(x)|)\right)' = \left(\ln(g(x))\right)' = \frac{g'(x)}{g(x)} \quad \checkmark \text{ o.k.}$$

$\underline{g(x) < 0:}$

$$F'(x) = \left(\ln(|g(x)|)\right)' = \left(\ln(-g(x))\right)' = \frac{-g'(x)}{-g(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} \quad \checkmark \text{ o.k.}$$

Aufgabe

(a) $$\int_0^{2\pi} e^{\sin(x)} \cdot \cos(x) \; dx$$

(a) oben

$$= \left[e^{\sin(x)} \right]_0^{2\pi} = e^0 - e^0 = \underline{\underline{0}}$$

„Skizze mit wolframalpha"

(b) $$\int_0^{2\pi} \sin(x) \cdot \cos(x) \; dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 2\cos(x) \, \sin(x) \; dx$$

(b) oben

$$= \frac{1}{2} \left[\sin^2(x) \right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{0}}$$

„Skizze mit wolframalpha"

(c) $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{3\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\, dx$$

(c) oben

$$= \Big[\ln\big(\sin(x)\big) \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{3\frac{\pi}{4}}$$

$$= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \underline{\underline{0}}$$

„Skizze mit wolframalpha"