Aufgabe 1 *Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:* 15 Punkte

(a) $\frac{1-i}{(2+2i)^2}$, *(b)* $(2i)^{10}$, *(c)* $\left(e^{-\pi i}\right)^4$.

Aufgabe 2 *Faktorisieren Sie die folgenden algebraischen Polynome in Linearfaktoren:*

(a) $p(z) := z^3 - 2z^2 + 9z - 18$, 10 Punkte

(b) $q(z) := z^4 - 25$. 5 Punkte

Aufgabe 3 *Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix* $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, 20 Punkte

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 6 & -6 & 0 \\ 12 & -6 & -3 \end{pmatrix} .$$

Geben Sie ferner eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *an, so dass* $C^{-1}AC$ *Diagonalgestalt hat.*

Aufgabe 4 *Gegeben sei die lineare Abbildung* $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *durch Angabe ihrer Wirkung auf die Einheitsbasis im* $\mathbb{R}^3$*, konkret* 20 Punkte

$$L((1,0,0)^T) := (1,2,3)^T \ , \quad L((0,1,0)^T) := (2,4,6)^T \ , \quad L((0,0,1)^T) := (-3,-6,-9)^T \ .$$

Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}\,(L)$ *und* $\mathrm{Bild}\,(L)$ *sowie eine Basis* $\mathscr{B}_{\mathrm{Kern}\,(L)}$ *von* $\mathrm{Kern}\,(L)$ *und eine Basis* $\mathscr{B}_{\mathrm{Bild}\,(L)}$ *von* $\mathrm{Bild}\,(L)$. *Geben Sie ferner* $\dim \mathrm{Kern}\,(L)$ *und* $\dim \mathrm{Bild}\,(L) = \mathrm{Rang}\,(L)$ *an.*

Aufgabe 5 *Berechnen Sie, falls möglich, die Grenzwerte der angegebenen vier Folgen:* 15 Punkte

$$\left(\frac{2n^2+n}{6n^4+4n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \left(\frac{2n^5+6n+4}{6n^3+4n+12}\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

$$\left(\frac{5n^3+8n+12}{20n^3+4n^2+32}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \left(\frac{3n^3+8}{3n^3+12}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Aufgabe 6 *Gegeben seien die drei Funktionen*

$f(x) := x^3 - 3x^2 - x + 2,$ $g(x) := x\sin(x),$ $h(x) := x^2\exp(x^3).$

Berechnen Sie:

(a) 2 Punkte

$$(g \circ h)(x) \ ,$$

(b) 8 Punkte

$$f'(x) \ , \ g'(x) \ \text{ und } \ h'(x) \ ,$$

(c) 10 Punkte

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx \ , \ \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx \ \text{ und } \int_{0}^{1} h(x)dx \ .$$