Fachhochschule Dortmund
University of Applied Sciences and Arts

Studiengang Informatik

Prüfungsfach:	Mathematik für Informatiker 2
Prüfer:	Prof. Dr. Burkhard Lenze
Prüfungstermin:	31.08.2021
Dauer der Prüfung:	60 Minuten
Hilfsmittel:	Keine Einschränkungen!

Name, Vorname:	
Matrikelnummer:	

Hinweise:

• Füllen Sie das Deckblatt aus und speichern Sie das pdf immer mal wieder! •
• Es gibt insgesamt 4 Aufgaben und maximal 75 Punkte sind erreichbar! •

• Verwenden Sie für Ihre Lösungen nur die Formular-Text-Felder! •
• Ersetzen Sie dort ? oder ??? durch Ihre konkreten (Zwischen-)Ergebnisse! •
• Nur wenn explizit gefordert, ist der komplette Lösungsweg anzugeben! •
• Ansonsten reicht stets die Angabe der Ergebnisse OHNE RECHNUNG! •
• Vor Upload Ihrer Lösungen testen Sie bitte die Speicherung Ihrer Eingaben! •

Bewertungsschlüssel:

Punkte	66,5	63	59,5	56	52,5	49	45,5	42	38,5	35	< 35
Note	1.0	1.3	1.7	2.0	2.3	2.7	3.0	3.3	3.7	4.0	5.0

Ergebnis:

Aufgabe	1	2	3	4		**Summe**	**Note**
maximale Punkte	15	20	20	20		75	
erhaltene Punkte							

Aufgabe 1 *Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:*

(a) $\dfrac{(3-2\mathrm{i})^2}{4-\mathrm{i}}$, 5 Punkte

(b) $\dfrac{(5+3\mathrm{i})}{(4+\mathrm{i})^2}$, 5 Punkte

(c) $(1-\mathrm{i})^{10}$. 5 Punkte

Lösung der Aufgabe:

(a) Das Ergebnis lautet: ???
(b) Das Ergebnis lautet: ???
(c) Das Ergebnis lautet: ???

Aufgabe 2 *Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A,* 20 Punkte

$$A := \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ -2 & 7 & -2 \\ -10 & 13 & -2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie explizit eine (3,3)-Matrix C an, so dass die Matrix $C^{-1}AC$ Diagonalgestalt hat.

Hinweis: *Alle Eigenwerte von A sind ganzzahlig!*

Lösung der Aufgabe:

Eigenwerte:
Erster: ???
Zweiter: ???
Dritter: ???

Eigenvektoren:
Erster: ???
Zweiter: ???
Dritter: ???

Matrix C = ???

Aufgabe 3 *Berechnen Sie das algebraische Polynom p vom Höchstgrad 3, welches Nullstellen in $x_1 := -1$ und $x_2 := 3$ hat und an der Stelle $x_3 := 5$ ein lokales Maximum mit Funktionswert $p(x_3) = 36$ besitzt.* 20 Punkte

Lösung der Aufgabe:

Das Polynom lautet: p(x) = ??? x^3 + ??? x^2 + ??? x + ???

Aufgabe 4 *Integrieren Sie die folgenden Funktionen über die gegebenen Intervalle:*
(a) $f : [0,\pi] \to \mathbb{R},\ t \mapsto t \cdot \cos(t)$, 10 Punkte
(b) $f : [0,2] \to \mathbb{R},\ t \mapsto t \cdot \exp(t^2)$. 10 Punkte

Lösung der Aufgabe:

Hier ist auch jeweils anzugeben, welche Integrationsregel Sie verwendet haben!!
(a) Das Ergebnis lautet: ???
Die benutzte Integrationsregel war hier: ???
(b) Das Ergebnis lautet: ???
Die benutzte Integrationsregel war hier: ???

Aufgabe 1 *Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:*

(a) $\dfrac{(3-2\mathrm{i})^2}{4-\mathrm{i}}$, 5 Punkte

(b) $\dfrac{(5+3\mathrm{i})}{(4+\mathrm{i})^2}$, 5 Punkte

(c) $(1-\mathrm{i})^{10}$. 5 Punkte

Lösung:

```
(a)

((3-2i)^2)/(4-i)  =  (5-12i)*(4+i)/((4-i)*(4+i))  =
                   =  (32-43i)/17

(5+3i)/((4+i)^2)  =  (5+3i)/(15+8i)
                   =  (5+3i)*(15-8i)/((15+8i)*(15-8i))
                   =  (99+5i)/289

(1-i)^10  =  (-2i)^5  =  -32i
```

Name: ________________ Vorname: ________________

Aufgabe 2 *Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A,* 20 Punkte

$$A := \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ -2 & 7 & -2 \\ -10 & 13 & -2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie explizit eine (3,3)-Matrix C an, so dass die Matrix $C^{-1}AC$ Diagonalgestalt hat.

Hinweis: *Alle Eigenwerte von A sind ganzzahlig!*

Lösung:

```
Die Matrix A lautete:
  -4    3    0
  -2    7   -2
 -10   13   -2

det(A-lam*E)=(-4-lam)*(7-lam)*(-2-lam) + 60 + 0
             - 0 - (-26)*(-4-lam) - (-6)*(-2-lam)
          = (lam^2-3*lam-28)*(-2-lam) +60 -104 -26*lam -12 -6*lam
          = -lam^3+lam^2+2*lam = (-lam)*(lam+1)*(lam-2) = 0

Die Eigenwerte lauten also:   -1        0        2

EV zu lam_1 = -1 :
   -3      3      0    r_1      0
   -2      8     -2    r_2  =   0
  -10     13     -1    r_3      0

z.B. r^1 = (1,1,3)^T

EV zu lam_2 = 0 :
   -4      3      0    r_1      0
   -2      7     -2    r_2  =   0
  -10     13     -2    r_3      0

z.B. r^2 = (3,4,11)^T

EV zu lam_3 = 2 :
   -6      3      0    r_1      0
   -2      5     -2    r_2  =   0
  -10     13     -4    r_3      0

z.B. r^3 = (1,2,4)^T

Eine mögliche Eigenvektor-Matrix C lautet:
   1        3       1
   1        4       2
   3       11       4
```

Aufgabe 3 *Berechnen Sie das algebraische Polynom p vom Höchstgrad 3, welches Nullstellen in $x_1 := -1$ und $x_2 := 3$ hat und an der Stelle $x_3 := 5$ ein lokales Maximum mit Funktionswert $p(x_3) = 36$ besitzt.* 20 Punkte

Lösung:
Wir suchen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $p(x) = a(x+1)(x-3)(x-b)$. Aus $p'(5) = 0$ ergibt sich zunächst wegen

$$p'(x) \;=\; a(x-3)(x-b) + a(x+1)(x-b) + a(x+1)(x-3)$$

für a und b die Gleichung

$$\begin{aligned} p'(5) =&\; a(5-3)(5-b) + a(5+1)(5-b) + a(5+1)(5-3) \\ =&\; 2a(5-b) + 6a(5-b) + 12a \\ =&\; 52a - 8ab \;=\; 4a(13-2b) \;=\; 0\,. \end{aligned}$$

Da a nicht Null sein kann, muss $b := \frac{13}{2}$ gelten. Mit der Bedingung $p(5) = 36$ berechnet sich a aus

$$p(5) \;=\; a(5+1)(5-3)(5-\frac{13}{2}) \;=\; -18a \;=\; 36$$

zu $a := -2$. Insgesamt lautet das gesuchte Polynom also

$$p(x) = -2(x+1)(x-3)(x-\frac{13}{2}) = -2x^3 + 17x^2 - 20x - 39\,.$$

Aufgabe 4 *Integrieren Sie die folgenden Funktionen über die gegebenen Intervalle:*
(a) $f : [0,\pi] \to \mathbb{R},\ t \mapsto t \cdot \cos(t)$, 10 Punkte
(b) $f : [0,2] \to \mathbb{R},\ t \mapsto t \cdot \exp(t^2)$. 10 Punkte

Lösung:

(a) Mit partieller Integration ergibt sich

$$\int_0^\pi t \cdot \cos(t) dt = [t \sin(t)]_0^\pi - \int_0^\pi 1 \cdot \sin(t) dt = [\cos(t)]_0^\pi = -2\,.$$

(b) Mit der Substitution $g(t) := t^2$, also $g'(t) = 2t$, ergibt sich

$$\int_0^2 t \cdot \exp(t^2) dt \;=\; \frac{1}{2}\int_0^2 \exp(t^2) 2t\, dt \;=\; \frac{1}{2}\int_0^4 \exp(x) dx \;=\; \frac{1}{2}[\exp(x)]_0^4 \;=\; \frac{1}{2}(e^4 - 1)\,.$$