Fachhochschule Dortmund
University of Applied Sciences and Arts

Studiengang Informatik

Prüfungsfach: Mathematik für Informatik 2 (dual)
Prüfer: Prof. Dr. Burkhard Lenze
Prüfungstermin: 14.02.2023
Dauer der Prüfung: 90 Minuten
Hilfsmittel: Ein beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt

Name, Vorname: ______________________________

Matrikel/Platz: ____________________ / ____________

Unterschrift: ______________________________

Hinweise:

• Füllen Sie zunächst das Deckblatt aus und unterschreiben Sie es! •
• Es gibt insgesamt 6 Aufgaben und maximal 105 Punkte sind erreichbar! •

• Verwenden Sie für die Lösungen nur die gegebenen Blätter! •
• Verwenden Sie einen dokumentenechten Stift (keinen Bleistift)! •
• Lassen Sie bitte alle Blätter im zusammengehefteten Zustand! •
• Geben Sie bei allen Aufgaben den kompletten Lösungsweg an! •
• Ohne den zugehörigen Lösungsweg gibt es stets nur 0 Punkte! •

Bewertungsschlüssel:

Punkte	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50	< 50
Note	1.0	1.3	1.7	2.0	2.3	2.7	3.0	3.3	3.7	4.0	5.0

Ergebnis:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6		**Summe**	**Note**
maximale Punkte	15	15	20	20	15	20		105	
erhaltene Punkte									

Aufgabe 1 *Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:*

(a) $\dfrac{(2-4\mathrm{i})^2}{1-\mathrm{i}}$, 5 Punkte

(b) $\dfrac{(-3\mathrm{i})^2}{(1+\mathrm{i})^2}$, 5 Punkte

(c) $(-2\mathrm{i})^7$. 5 Punkte

Lösung:

```
(a)
(2-4i)^2/(1-i) = (-12-16i)*(1+i)/2 = (4-28i)/2 = 2-14i

(b)
(-3i)^2/(1+i)^2 = -9/2i = 9i/2

(c)
(-2i)^7 = -128i^3 = 128i
```

Name: _______________ Vorname: _______________

Aufgabe 2 *Bestimmen Sie die vollständige Faktorisierung des folgenden Polynoms:* 15 Punkte

$$p(z) := z^4 - 2z^3 - 6z^2 + 22z - 15\ .$$

Lösung:

```
Rate NST z_1=1

Abdivision von (z-1):

(z^4-2z^3-6z^2+22z-15):(z-1)=z^3-z^2-7z+15
 z^4 -z^3
---------
     -z^3-6z^2
     -z^3 +z^2
    ------------
         -7z^2+22z
         -7z^2+ 7z
        -----------
               15z-15
               15z-15
              ---------
                    0

Rate NST z_2=-3
Abdivision von (z+3):

(z^3-z^2-7z+15):(z+3)=z^2-4z+5
z^3+3z^2
--------
   -4z^2-7z
   -4z^2-12z
   ---------
         5z+15
         5z+15
       --------
             0

Mit p/q-Formel oder quadratischer Ergänzung ergibt sich ferner:

z^2-4z+5 = (z-(2-i))*(z-(2+i))

Die Faktorisierung des Polynoms lautet also:

 p(z) = (z-1)*(z+3)*(z-(2-i))*(z-(2+i))
```

Aufgabe 3 *Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,* 20 Punkte

$$A := \begin{pmatrix} -12 & 10 & -5 \\ -15 & 13 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Geben Sie ferner eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, so dass $C^{-1}AC$ Diagonalgestalt hat.

Hinweis: *Ein Eigenwert von A ist doppelt!*

Lösung:

1. Schritt: Aus der Gleichung

$$p(\lambda) \;=\; \det(A-\lambda E) \;=\; \det\begin{pmatrix} -12-\lambda & 10 & -5 \\ -15 & 13-\lambda & -5 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+2) \;=\; 0$$

berechnen sich die Lösungen $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$, also die Eigenwerte von A.
2. Schritt: Aus dem Gleichungssystem

$$(A-\lambda_1 E)\vec{r}^{(1)} = \vec{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} -10 & 10 & -5 \\ -15 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \\ r_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergeben sich alle zu $\lambda_1 = -2$ gehörenden Eigenvektoren zu

$$\vec{r}^{(1)} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \;\; \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\} .$$

Aus dem Gleichungssystem

$$(A-\lambda_{2/3} E)\vec{r}^{(2/3)} = \vec{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} -15 & 10 & -5 \\ -15 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(2/3)} \\ r_2^{(2/3)} \\ r_3^{(2/3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergeben sich alle zu $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ gehörenden Eigenvektoren zu

$$\vec{r}^{(2)} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} , \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \;\; |\alpha| + |\beta| \neq 0 .$$

Die gesuchte Matrix C kann man z.B. erhalten, indem man die Eigenvektoren als Spaltenvektoren in C schreibt, also

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 4 *Gegeben sei die lineare Abbildung* $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *durch Angabe ihrer Wirkung auf die Einheitsbasis im* $\mathbb{R}^3$*, konkret* 20 Punkte

$$L((1,0,0)^T) := (-1,1,3)^T \ , \quad L((0,1,0)^T) := (0,6,3)^T \ , \quad L((0,0,1)^T) := (2,4,-3)^T \ .$$

Bestimmen Sie $\operatorname{Kern}(L)$ *und* $\operatorname{Bild}(L)$ *sowie eine Basis* $\mathscr{B}_{\operatorname{Kern}(L)}$ *von* $\operatorname{Kern}(L)$ *und eine Basis* $\mathscr{B}_{\operatorname{Bild}(L)}$ *von* $\operatorname{Bild}(L)$*. Geben Sie ferner* $\dim \operatorname{Kern}(L)$ *und* $\dim \operatorname{Bild}(L) = \operatorname{Rang}(L)$ *an.*

Lösung:
Um $\operatorname{Kern}(L)$ zu berechnen, ist das lineare Gleichungssystem

$$x_1(-1,1,3)^T + x_2(0,6,3)^T + x_3(2,4,-3)^T = (0,0,0)^T$$

zu lösen. Als Lösung erhält man

$$\mathbf{L} = \operatorname{Kern}(L) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} .$$

Also ist zunächst

$$\dim \operatorname{Kern}(L) = 1$$

und aufgrund der Dimensionsformel

$$\operatorname{Rang}(L) = \dim \operatorname{Bild}(L) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Kern}(L) = 3 - 1 = 2$$

und z.B.

$$\mathscr{B}_{\operatorname{Kern}(L)} := \{(2,-1,1)^T\}$$

eine Basis von $\operatorname{Kern}(L)$. Eine Basis von $\operatorname{Bild}(L)$ kann man schließlich berechnen, indem man die Bilder der Einheitsvektoren zeilenweise mittels Gaußschem Algorithmus reduziert, also

$$\begin{array}{rrrr}
-1 & 1 & 3 & \cdot 2 \\
0 & 6 & 3 & | \\
2 & 4 & -3 & \leftarrow + \\
\hline
-1 & 1 & 3 & \\
0 & 6 & 3 & \cdot(-1) \\
0 & 6 & 3 & \leftarrow + \\
\hline
-1 & 1 & 3 & \\
0 & 6 & 3 & \\
0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

Also gilt z.B.

$$\mathscr{B}_{\operatorname{Bild}(L)} = \{(-1,1,3)^T, (0,6,3)^T\}$$

und

$$\operatorname{Bild}(L) = \operatorname{Spann}_{\mathbb{R}}\{(-1,1,3)^T, (0,6,3)^T\}.$$

Aufgabe 5 *Gegeben sei das algebraische Polynom* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vom Grad* 4,

$$p(x) := 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 3 \; .$$

(a) Geben Sie alle Stammfunktionen von p an. 3 Punkte

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von p und geben Sie explizit an, ob es sich um lokale Maxima oder Minima handelt. 12 Punkte

Lösung:
(a) $P(x) = \frac{3}{5}x^5 + x^4 - 4x^3 + 3x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

(b)

$$\begin{aligned} p(x) &= 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 3 \\ p'(x) &= 12x^3 + 12x^2 - 24x \\ p''(x) &= 36x^2 + 24x - 24 \end{aligned}$$

Weiter folgt aus $p'(x) = 0$ entweder $x = 0$ oder $x = -2$ oder $x = 1$. Damit ergibt sich abschließend

$$\begin{aligned} p''(-2) = 72 > 0 &\quad \Rightarrow \quad lok.\ Min.\ bei \;\; -2 \\ p''(0) = -24 < 0 &\quad \Rightarrow \quad lok.\ Max.\ bei \;\; 0 \\ p''(1) = 36 > 0 &\quad \Rightarrow \quad lok.\ Min.\ bei \;\; 1 \end{aligned}$$

Name: ________________ Vorname: ________________

Aufgabe 6 *Gegeben seien die drei Funktionen*

$f(x) := x^3 - 3x^2 - x + 2,$ $\quad g(x) := x\sin(x),$ $\quad h(x) := x^2\exp(x^3).$

Berechnen Sie:

(a) 2 Punkte

$$(g \circ h)(x) \ ,$$

(b) 8 Punkte

$$f'(x)\ ,\ \ g'(x) \ \ \textit{und} \ \ h'(x)\ ,$$

(c) 10 Punkte

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx\ ,\ \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx \ \ \textit{und} \ \ \int_{0}^{1} h(x)dx\ .$$

Lösung:

(a)

$$g(h(x)) = x^2\exp(x^3)\sin(x^2\exp(x^3))\ ,$$

(b)

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 1\ ,\ \ g'(x) = \sin(x) + x\cos(x)\ ,\ \ h'(x) = 2x\exp(x^3) + 3x^4\exp(x^3)\ ,$$

(c)

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx = -4\ ,\ \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = 2\pi\ ,\ \int_{0}^{1} h(x)dx = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e\ .$$