Vorlesung

Vektorraum $\mathbb{Z}_7^3$

$$\mathbb{Z}_7^3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{Z}_7 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$4 \odot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Basis im $\mathbb{Z}_7^3$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\dim \mathbb{Z}_7^3 = 3$$

$$|\mathbb{Z}_7^3| = |\mathbb{Z}_7|^3 = 7^3$$ „Kardinalität“

Untervektorraum von $\mathbb{Z}_7^3$:

z.B. $U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{Z}_7 \right\}$

$\dim U = \underline{\underline{2}}$

$|U| = 7^2 = \underline{\underline{49}}$

Beispiel zur Analyse einer linearen Abbildung

$L : \mathbb{Z}_7^4 \longrightarrow \mathbb{Z}_7^4$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

als $L : \vec{x} \longmapsto A\,\vec{x}$.

Bestimme zunächst alle Elemente aus $\mathbb{Z}_7^4$, die durch L auf den Nullvektor abgebildet werden. Man nennt die Gesamtheit dieser Elemente den **Kern von L**, kurz **Kern(L)**.

Bestimme $\vec{x} \in \mathbb{Z}_7^4$ mit $A\,\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 3 & 6 & 0 \end{array} \quad / \odot 3$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 5 & 1 & 6 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 3 & 6 & 0 \end{array}$$

$/\odot 3$ $\oplus$ $/\odot 2$ $\oplus$ $/\odot 1$ $\oplus$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 5 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 0 \end{array}$$

$/\odot 2$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 5 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 0 \end{array}$$

$/\odot 1$ $\oplus$ $/\odot 6$ $\oplus$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 5 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$/\odot 5$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 5 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$/\odot 6$ $\oplus$

$$
\begin{array}{cccc|c|l}
1 & 5 & 1 & 6 & 0 & (1)\\
0 & 1 & 3 & 4 & 0 & (2)\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & (3)\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (4)\\
\hline
\end{array}
$$

<u>Aufrollen von unten:</u>

(4) $0 \odot x_4 = 0$, also $\underline{\underline{x_4 := s}} \in \mathbb{Z}_7$ bel.

(3) $x_3 \oplus s = 0 \implies \underline{\underline{x_3 = -s = 6 \odot s}}$

(2) $x_2 \oplus 3 \odot 6 \odot s \oplus 4 \odot s = 0 \implies$

$$\underline{\underline{x_2 = -s = 6 \odot s}}$$

(1) $x_1 \oplus 5 \odot 6 \odot s \oplus 6 \odot s \oplus 6 \odot s = 0 \implies$

$$\underline{\underline{x_1 = 0}}$$

<u>Also:</u>

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \mathrm{Kern}(L)}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \odot s \\ 6 \odot s \\ s \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{Z}_7 \right\}$$

$$\underline{\underline{= \left\{ s \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{Z}_7 \right\}}}$$

Untervektorraum des Definitionsber. von L

$\dim \mathrm{Kern}(L) = 1$ (Anzahl frei wählbarer Param.)

$$B_{\mathrm{Kern}(L)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ (Basis von Kern(L))

Bestimmung einer Basis von Bild(L), also des Spanns der Spaltenvektoren:

„Schreibe Spaltenvektoren zeilenweise in Matrix"

$$\begin{array}{cccc} 5 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \end{array} \qquad \odot 3$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \end{array} \qquad /\odot 3 \quad \oplus \qquad /\odot 2 \quad \oplus \qquad /\odot 5 \quad \oplus$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 5 \end{array} \qquad /\odot 2$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 5 \end{array} \qquad /\odot 2 \quad \oplus \qquad /\odot 5 \quad \oplus$$

$$\begin{array}{cccc|l}
1 & 5 & 1 & 4 & \\
0 & 1 & 5 & 2 & \\
0 & 0 & 3 & 1 & /\odot -1 \text{ bzw. } \odot 6 \\
0 & 0 & \boxed{3} & 1 & \oplus \\
\hline
1 & 5 & 1 & 4 & \\
0 & 1 & 5 & 2 & \\
0 & 0 & 3 & 1 & \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

Also: $\dim \operatorname{Bild}(L) = 3$ (Nicht-0-Zeilen)

Konvention: $\operatorname{Rang}(L) := \dim \operatorname{Bild}(L)$.

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Bild}(L)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Basis von Bild(L)

$$\operatorname{Bild}(L) = \operatorname{Spann}_{\mathbb{Z}_7} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Untervektorraum des Wertebereichs von L

Beobachtung:

$$\underbrace{\dim \operatorname{Bild}(L)}_{3} + \underbrace{\dim \operatorname{Kern}(L)}_{1} = \underbrace{\dim \mathbb{Z}_7^4}_{4}$$

„Dimensionsatz"