Vorlesung

Motivation:

https://www.gm.fh-koeln.de/~konen/SGM/Skript-Kap1.1-1.2.PDF

Beispiel zu EW / EV einer (2,2)-Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 15 & -3 \\ 80 & -16 \end{pmatrix}.$$

1. Schritt:

$$p(\lambda) := \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 15-\lambda & -3 \\ 80 & -16-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (15-\lambda)(-16-\lambda) - (-3)\cdot 80$$

$$= \lambda^2 + \lambda - 240 + 240$$

$$= \lambda^2 + \lambda = 0 \implies \underline{\underline{\lambda_1 = -1}}, \underline{\underline{\lambda_2 = 0}}$$

2. Schritt

EV $\vec{r}^{(1)}$ zum EW $\lambda_1 = -1$:

$$(A - \lambda_1 E)\vec{r}^{(1)} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 15-(-1) & -3 \\ 80 & -16-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 16 & -3 \\ 80 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{z.B. } \underline{\underline{\vec{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \end{pmatrix}}}$$

EV $\vec{r}^{(2)}$ zum EW $\lambda_2 = 0$:

$$\left(A - \lambda_2 E\right) \vec{r}^{(2)} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 15-0 & -3 \\ 80 & -16-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(2)} \\ r_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{z.B. } \underline{\underline{\vec{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}}}$$

Definiere Matrix R als

$$R := \begin{pmatrix} \vec{r}^{(1)} & \vec{r}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 16 & 5 \end{pmatrix}.$$

Berechne R^{-1} :

$$R \quad \begin{array}{cccc l} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 16 & 5 \end{pmatrix} & & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & & \begin{matrix} /:3 \\ \end{matrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc l} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & /\cdot(-16) \\ \boxed{16} & 5 & 0 & 1 & + \\ \hline 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{16}{3} & 1 & /\cdot(-3) \\ \hline 1 & \boxed{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3} & 0 & + \\ 0 & 1 & 16 & -3 & /\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 16 & -3 \end{pmatrix} = R^{-1}$$

Berechne nun:

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 16 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -3 \\ 80 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 16 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 16 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -16 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} =: D$$

$$\Longrightarrow A = R D R^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 16 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 16 & -3 \end{pmatrix}$$

$\leadsto$ Jordan-Zerlegung

$\leadsto$ Anwendung z.B. Datenkompression

Fazit:

„A wurde durch eine Ähnlichkeitstransformation auf Diagonalgestalt D transformiert, wobei R aus den EVen und D aus den EWen aufgebaut ist!

Durch Umstellen der Transformation erhält man die Jordan-Zerlegung von A."

Übung

Aufgabe: Berechnen Sie die EW/EV von

$$A := \begin{pmatrix} 18 & -20 \\ 24 & -26 \end{pmatrix}.$$

1\. Schritt: EW berechnen

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 18-\lambda & -20 \\ 24 & -26-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (18-\lambda)\cdot(-26-\lambda) - 24\cdot(-20)$$

$$= \lambda^2 - 18\lambda + 26\lambda - 468 + 480$$

$$= \lambda^2 + 8\lambda + 12$$

$$= (\lambda + 2)\cdot(\lambda + 6) = 0,$$

also $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -6$.

2. Schritt: EV berechnen

$\vec{r}^{(1)}$ zu $\lambda_1 = -2$:

$$\left(A-\lambda_1 E\right)\vec{r}^{(1)} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} \overset{18-(-2)}{\overbrace{20}} & -20 \\ 24 & \underbrace{-24}_{-26-(-2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

z.B. $\vec{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{r}^{(2)}$ zu $\lambda_2 = -6$:

$$\left(A-\lambda_2 E\right)\vec{r}^{(2)} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} \overset{18-(-6)}{\overbrace{24}} & -20 \\ 24 & \underbrace{-20}_{-26-(-6)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1^{(2)} \\ r_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

z.B. $\vec{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Zusatzaufgabe: Transformieren Sie A mit Hilfe der EV-Matrix R und ihrer inversen R^{-1} auf

Diagonalgestalt:

$$R := \left(\vec{r}^{\,(1)} \;\; \vec{r}^{\,(2)} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Berechnung von R^{-1}:

$$\begin{array}{cc|cc|l} \multicolumn{2}{c|}{R} & \multicolumn{2}{c|}{E} & \\ 1 & 5 & 1 & 0 & \mid \cdot(-1) \\ 1 & 6 & 0 & 1 & + \\ \hline 1 & 5 & 1 & 0 & + \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \mid \cdot(-5) \\ \hline 1 & 0 & 6 & -5 & \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \\ \multicolumn{2}{c|}{E} & & & \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = R^{-1}$$

Berechne nun:

$$R^{-1} A R = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 18 & -20 \\ 24 & -26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -30 \\ -2 & -36 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \checkmark$$

wie erwartet!

Aufgabe

Berechnen Sie die EW/EV von

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & -6 & -8 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

1. Schritt: EW berechnen

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & 4 \\ -2 & -6-\lambda & -8 \\ -4 & 2 & 7-\lambda \end{pmatrix}$$

„Regel von Sarrus"

$$= (-1-\lambda)(-6-\lambda)(7-\lambda) + 64 - 16$$

$$- (-16)(-6-\lambda) - (-16)(-1-\lambda) - (-4)(7-\lambda)$$

$$= (\lambda^2+7\lambda+6)(7-\lambda) + 48$$

$$-96-16\lambda-16-16\lambda+28-4\lambda$$

$$= -\lambda^3 - 7\lambda^2 - 6\lambda + 7\lambda^2 + 49\lambda + 42 + 48$$

$$-36\lambda - 84$$

$$= -\lambda^3 + 7\lambda + 6 = 0.$$

Rate: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -2$

2. Schritt: EV berechnen

$\vec{r}^{(1)}$ zu $\lambda_1 = -1$:

$$(A-\lambda_1 E)\vec{r}^{(1)} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} -1+1 & 2 & 4 \\ -2 & -6+1 & -8 \\ -4 & 2 & 7+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \\ r_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & -5 & -8 & 0 \\ -4 & 2 & 8 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} (\#) \\ \\ (*) \end{array}$$

z. B. $\vec{r}^{\,(1)} = \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{\begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$ aus (*) berechnen

aus (#) raten

$$(*) \quad -4 r_1^{(1)} - 4 + 8 = 0 \implies r_1^{(1)} = 1$$

$\vec{r}^{\,(2)}$ zu $\lambda_2 = 3$:

$$(A - \lambda_2 E)\vec{r}^{\,(2)} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} -1-3 & 2 & 4 \\ -2 & -6-3 & -8 \\ -4 & 2 & 7-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(2)} \\ r_2^{(2)} \\ r_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

−2	1	2	0	$/\cdot(-1)$ $/\cdot(-1)$
−2	−9	−8	0	+
−2	1	2	0	+
−2	1	2	0	
0	−10	−10	0	
0	0	0	0	

z. B. $\vec{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{r}^{(3)}$ zu $\lambda_3 = -2$:

$$(A - \lambda_3 E)\vec{r}^{(3)} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} -1+2 & 2 & 4 \\ -2 & -6+2 & -8 \\ -4 & 2 & 7+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(3)} \\ r_2^{(3)} \\ r_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc|l}
1 & 2 & 4 & 0 & \mid \cdot 2 \quad \mid \cdot 4 \\
-2 & -4 & -8 & 0 & \leftarrow + \\
-4 & 2 & 9 & 0 & \leftarrow + \\
\hline
1 & 2 & 4 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 10 & 25 & 0 & \\
\hline
\end{array}$$

z. B. $\vec{r}^{(3)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Zusatzaufgabe: Transformieren Sie A mit Hilfe der EV-Matrix R und ihrer inversen R^{-1} auf Diagonalgestalt:

$$R := \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Berechnung von R^{-1}:

$$\begin{array}{ccc|ccc|l} 1 & -\frac{1}{2} & -2 & 1 & 0 & 0 & /\cdot 2 \quad /\cdot(-1) \\ -2 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & + \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & \qquad\quad + \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & -2 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \leftarrow \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 1 & \leftarrow \quad /\cdot(-2) \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & -2 & 1 & 0 & 0 & + \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 & /\cdot \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \\ \hline \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \boxed{-2} & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \boxed{0} & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} + \\ \\ /\cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = R^{-1}$$

Berechne nun

$$R^{-1} A R$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & -6 & -8 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -6 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

„wie erwartet!"

Aufgabe

Berechnen Sie die EW/EV von

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Beobachtung:

Da der mittlere Spaltenvektor $(0,1,0)^T$ ist, gilt

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also ist 1 ein EW von A zum EV $(0,1,0)^T$.

Klassisches Herangehen:

1. Schritt Berechne EW

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -2 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 4 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\underline{(1-\lambda)}(-3-\lambda) + 8\underline{(1-\lambda)}$$

$$= \underline{(1-\lambda)}\Big((3-\lambda)(-3-\lambda)+8\Big)$$

$$= (1-\lambda)\left(\lambda^2-9+8\right)$$

$$= (1-\lambda)\left(\lambda^2-1\right)$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+1) = 0,$$

also: $\underline{\underline{\lambda_1=-1,\ \underbrace{\lambda_2=1,\ \lambda_3=1}_{\text{„ist doppelter EW!“}}}}$.

<u>2. Schritt</u> Berechne EV

<u>EV $\vec{r}^{(1)}$ zu $\lambda_1=-1$:</u>

$$(A-\lambda_1 E)\vec{r}^{(1)} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \\ r_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{z.B. } \vec{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

EV $\vec{r}^{(2)}$ und $\vec{r}^{(3)}$ zu $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$:

$$\left(A - \lambda_{2/3} E\right)\vec{r} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & -1 & 0 & (1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (3) \end{array}$$

$(3) \quad 0\, r_3 = 0 \implies \underline{\underline{r_3 = s_1}} \in \mathbb{R}$ bel.

$(2) \quad 0\, r_2 + 0\, s_1 = 0 \implies \underline{\underline{r_2 = s_2 \in \mathbb{R}}}$ bel.

$(1) \quad r_1 - s_1 = 0 \implies \underline{\underline{r_1 = s_1}}$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s_1, s_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Vorsicht: $|s_1| + |s_2| > 0$ für EVen!

$$\underline{\underline{= \left\{ s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; s_1, s_2 \in \mathbb{R} \right\}}}$$

Es geht auch schneller (raten):

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

z.B. $\vec{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Transformieren Sie nun die Matrix A mittels

$$R := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und R^{-1} auf Diagonalgestalt.

Berechnung von R^{-1}:

$$
R\quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} /\cdot 1 \quad /\cdot(-2) \\ + \\ \qquad\; + \end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \qquad\; + \\ /\cdot 1 \quad /\cdot(-1) \\ + \end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} + \\ /\cdot(-1) \quad /\cdot 1 \end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)
\qquad
\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = R^{-1}
$$

$$
R^{-1}AR = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark
$$

Aufgabe

Berechnen Sie die EW/EV von

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Beobachtung: Da A singulär ist, ist 0 ein EW von A.

1. Schritt: EW berechnen

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ -3 & -\lambda & 1 \\ 6 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(-\lambda)(-2-\lambda) - 6\lambda$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - \lambda - 6 + 6)$$

$$= -\lambda^2(\lambda - 1) = 0$$

Also: $\underline{\underline{\lambda_1 = 0}}$, $\underline{\underline{\lambda_2 = 0}}$, $\underline{\underline{\lambda_3 = 1}}$

2. Schritt: EV berechnen

EV $\vec{r}^{(1)}$ und $\vec{r}^{(2)}$ zu $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$:

$$\left(A - \lambda_{1/2} E\right)\vec{r} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

z.B. $\vec{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

EV $\vec{r}^{(3)}$ zu $\lambda_3 = 1$:

$$\left(A - \lambda_3 E\right)\vec{r}^{(3)} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1^{(3)} \\ r_2^{(3)} \\ r_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

z.B. $\vec{r}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.