Vorlesung

Wie kommt man auf die Idee, Folgen zu betrachten? Wir folgen (!!) Heron von Alexandria:

Suche Quadrat mit Fläche 2:

$F = 2$

$$b = \frac{2}{a} = 1$$

$$a = 2$$

$$a_{neu} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) = \frac{3}{2}$$

$$b_{neu} = \frac{2}{a_{neu}} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

$$a_{neu} = \frac{3}{2}$$

$$a_{neu\,neu} = \frac{1}{2}\left(a_{neu} + \frac{2}{a_{neu}}\right)$$

u.s.w.

Formalisierung des obigen Vorgehens:

$$a_0 := 2$$

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

„Heron-Folge"

Gibt es konvergente Reihen? Ja!

Beispiel Was ist $0.\overline{9}$?

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \ldots + \frac{9}{10^k} + \ldots$$

$$= 9 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 9 \cdot \frac{1}{9} = \underline{\underline{1}} \quad (\text{s.u.})$$

$$\left(\frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{10}\right)^n\right)\left(1 - \frac{1}{10}\right) =$$

$$\frac{1}{10} + \cancel{\left(\frac{1}{10}\right)^2} + \ldots + \cancel{\left(\frac{1}{10}\right)^n}$$

$$- \cancel{\left(\frac{1}{10}\right)^2} - \ldots - \cancel{\left(\frac{1}{10}\right)^n} - \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}$$

Also:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{\frac{1}{10}-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{10}}$$

$$\downarrow \quad n \to \infty \quad \downarrow$$

$$\underline{\underline{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = \underline{\underline{\frac{1}{9}}} \; .$$

Allgemein: Geometrische Reihen

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{für } -1<q<1 \\ \text{„}\infty\text{"} & \text{für } q=1 \\ \text{„diverg."} & \text{für } q=-1 \\ \text{„}\infty\text{"} & \text{für } q>1 \\ \text{„diverg."} & \text{für } q<-1 \end{cases}$$

Übung

<u>Aufgabe</u>

Berechnen Sie, sofern existent, die Grenzwerte folgender Folgen:

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$$

„Teile Zähler und Nenner stets durch höchste Nennerpotenz von n"

$$\overset{(QR)}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{0}{1} = \underline{\underline{0}}$$

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\frac{n^2+n+2}{4n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(4+\frac{1}{n^2}\right)} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\frac{n^2+n+2}{4n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\frac{\cancel{n}\left(n+1+\frac{2}{n}\right)}{\cancel{n}\left(4+\frac{1}{n}\right)} \rightsquigarrow \text{„}\frac{\infty}{4}\text{"}$$

Keine Konvergenz! Man spricht hier dann auch von bestimmter Divergenz gegen ∞.

(d) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Tipp: binomische Formel!

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)\frac{\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}+3n-\cancel{n^2}}{\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\cdot 3}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

Aufgabe

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine bestimmt gegen ∞ divergierende Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Nullfolge. Geben Sie konkrete Beispiele derartiger Folgen an, so dass die Produktfolge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(a) gegen 0 konvergiert,

(b) gegen 5 konvergiert,

(c) bestimmt gegen ∞ divergiert,

(d) gleich $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

(a) $a_n := n$, $b_n := \frac{1}{n^2}$,

(b) $a_n := n$, $b_n := \frac{5}{n}$,

(c) $a_n := n^2$, $b_n := \frac{1}{n}$,

(d) $a_n := n$, $b_n := (-1)^n \frac{1}{n}$.

Tipp zu Landau-Symbolen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien Folgen und $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten folgende hinreichende Bedingungen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} = \alpha > 0 \quad \Longrightarrow \quad a_n = \mathcal{O}(b_n) \quad (n \to \infty)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_n = o(b_n) \quad (n \to \infty)$$

Aufgabe

Zeigen Sie:

(a) $n^2 - n = \mathcal{O}(n^2) \quad (n \to \infty)$

(b) $n^3 + n^2 = o(n^4) \quad (n \to \infty)$

(c) $6n^5 + n^2 = \mathcal{O}(n^5) \quad (n \to \infty)$

(d) $\dfrac{n^3 + n + 1}{n^2 + 1} = o(n^2) \quad (n \to \infty)$

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{|n^2-n|}{|n^2|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n^2}} = 1 > 0$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{|n^3+n^2|}{|n^4|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^4}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^4}} = 0$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{|6n^5+n^2|}{|n^5|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^5}\left(6+\frac{1}{n^3}\right)}{\cancel{n^5}} = 6 > 0$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{|n^3+n+1|}{|(n^2+1)\,n^2|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^4}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right)}{\cancel{n^4}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = 0$

Aufgabe

Begründen Sie, warum die folgenden Reihen divergieren:

(a) $\left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(b) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{4k+1}{5k+42}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(c) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Zu (a): $\left((-1)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge!

Zu (b): $\left(\frac{4k+1}{5k+42}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge!

Zu (c): $\left(\frac{k^k}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge, denn

$$\frac{k^k}{k!} = \frac{k\cdot k\cdot k \cdot\ldots\cdot k}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k} \geq 1 \qquad \text{für } k \geq 1.$$

Aufgabe

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\right)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(k^3+1)\,x^k}{(3k+2)\,7^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

für alle $x \in (-7,7)$ absolut konvergiert.

Für $x \in (-7,7)$ liefert das Quotientenkriterium

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}(x)|}{|a_k(x)|} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{((k+1)^3+1)\,|x|^{\cancel{k+1}}\,(3k+2)\,\cancel{7^k}}{(3(k+1)+2)\,\cancel{7^{k+1}}\,(k^3+1)\,\cancel{|x|^k}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \underbrace{\frac{(k^3+3k^2+3k+2)}{(k^3+1)}}_{\to 1} \; \underbrace{\frac{|x|}{7}}_{= \frac{|x|}{7}} \; \underbrace{\frac{(3k+2)}{(3k+5)}}_{\to 1} \qquad k\to\infty$$

$$= \frac{|x|}{7} =: q < 1.$$

✓ o.K.

Aufgabe

Gegeben sei die Reihe

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{k!}{(2k)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Ist die Reihe konvergent? Begründung?

Ist die Reihe sogar absolut konvergent? Begründung?

Da die Reihe alternierend ist, folgt ihre Konvergenz mit dem Leibniz-Kriterium aus der Tatsache, dass die Folge $\left(\frac{k!}{(2k)!}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist:

$$a_{k+1} = \frac{(k+1)!}{(2(k+1))!}$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k\cdot(k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k\cdot(k+1)\cdot(k+2)\cdot\ldots\cdot(2k+2)}$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k\cdot\cancel{(k+1)}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k\cdot\cancel{(k+1)}\cdot(k+2)\cdot\ldots\cdot\underbrace{(2k+2)}_{2(k+1)}}$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}{1\cdot 2\cdot 3 \cdot \ldots \cdot k\cdot(k+1)\cdot(k+2)\cdot\ldots\cdot(2k+1)\cdot 2}$$

$$< \frac{1\cdot 2\cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}{1\cdot 2\cdot 3 \cdot \ldots \cdot k\cdot(k+1)\cdot(k+2)\cdot\ldots\cdot(2k)}$$

$$= \overset{a_k}{\frac{k!}{(2k)!}} \leq \frac{1}{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \, .$$

Auf die absolute Konvergenz der Reihe, die die „normale Konvergenz" impliziert, kann man z.B. mit dem Quotienten-Kriterium schließen:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left|(-1)^{k+1} \frac{(k+1)!}{(2(k+1))!}\right|}{\left|(-1)^k \frac{k!}{(2k)!}\right|}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!}{(2k+2)!} \frac{(2k)!}{k!}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)}{(2k+1)(2k+2)}$$

$$= 0 < 1 \qquad \checkmark \text{ o.k.}$$

Aufgabe

Betrachten Sie die Funktion

$$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad .$$

Zeigen Sie, dass die Funktion wohldefiniert ist und schreiben Sie ein kleines Java-Programm zur Berechnung von $\cos(x)$ für möglichst alle $x \in \mathbb{R}$.

Die Funktion cos ist für alle $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert, da die definierende Reihe nach dem Quotienten-Kriterium für alle $x \in \mathbb{R}$ (absolut) konvergent ist. Setzt man nämlich

$$a_k(x) := (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad , \ k \in \mathbb{N},$$

so folgt:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}(x)|}{|a_k(x)|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x^{2(k+1)}|\,(2k)!}{(2(k+1))!\,|x^{2k}|}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{x^2(2k)!}{(2k+2)!}$$

$$= x^2 \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$$

$$= 0 < 1 \qquad \checkmark \text{ o.K.}$$

Erster Versuch eines Java-Programms, welches man zum weiteren Optimieren zum Download bei den Mitschriften im Netz findet. Das vorliegende Programm funktioniert für $|x|$ nicht zu groß ganz gut. Für große oder kleine x versagt es jedoch! Warum? Verbesserungsvorschläge?!

Terminal   Sa, 24. Mai. 2014 10:37

File Edit Options Buffers Tools Java Help

```java
//   Cosinus.java
//   Programm zum Spielen, Ausprobieren und Verbessern
//   Ziel: "Gute" Berechnung der Cosinus-Funktion

import java.io.*;

public class Cosinus
{
   public static double myfak(int k)
   {
           double x;
           if (k==0) {return 1.0;}
           else {return ((double) k)*myfak(k-1);}
   }
   public static double mycos(double x)
   {
        double sum=0.0;
        double term=0.0;
        for (int k=0;k<=10;k++)
            {
            term=Math.pow((-1),k)*Math.pow(x,2*k)/myfak(2*k);
            sum+=term;
            }
        return sum;
    }
    public static void main(String[] args) throws IOException
    {
        double x;
        BufferedReader in = new BufferedReader(new InputStreamReader(System.in));
        System.out.print("Wie lautet die Stelle x? x = ");
        x = Double.parseDouble(in.readLine());
        System.out.println("Meine Rechnung liefert cos(x) = " + mycos(x));
        System.out.println("Java-Mathe-Bib liefert cos(x) = " + Math.cos(x));
     }
}
```

-UU-:----F1 **Cosinus.java**   All (1,0)   (Java/l Abbrev) ----------------

Loading cc-langs...done

besser: Horner-Typ-Auswertung

besser: mycos(x%(2*Math.PI))