Vorlesung

Motivation:

https://www.gm.fh-koeln.de/~konen/SGM/Skript-Kap1.1-1.2.PDF

Beispiel zu EW / EV einer (2,2)-Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 15 & -3 \\ 80 & -16 \end{pmatrix}.$$

1. Schritt:

$$p(\lambda) := \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 15-\lambda & -3 \\ 80 & -16-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (15-\lambda)(-16-\lambda) - (-3)\cdot 80$$

$$= \lambda^2 + \lambda - 240 + 240$$

$$= \lambda^2 + \lambda = 0 \implies \underline{\underline{\lambda_1 = -1}},\ \underline{\underline{\lambda_2 = 0}}$$

2. Schritt

EV $\vec{r}^{(1)}$ zum EW $\lambda_1 = -1$:

$$(A - \lambda_1 E)\vec{r}^{(1)} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 15-(-1) & -3 \\ 80 & -16-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 16 & -3 \\ 80 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{z.B. } \underline{\underline{\vec{r}^{\,(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \end{pmatrix}}}$$

EV $\vec{r}^{\,(2)}$ zum EW $\lambda_2 = 0$:

$$\left(A - \lambda_2 E\right) \vec{r}^{\,(2)} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 15-0 & -3 \\ 80 & -16-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(2)} \\ r_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{z.B. } \underline{\underline{\vec{r}^{\,(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}}}$$

Definiere Matrix R als

$$R := \left(\vec{r}^{\,(1)} \; \vec{r}^{\,(2)} \right) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 16 & 5 \end{pmatrix}.$$

Berechne R^{-1} :

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 16 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc|l} 3 & 1 & 1 & 0 & /:3 \\ 16 & 5 & 0 & 1 & \\ \hline 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & /\cdot(-16) \\ \boxed{16} & 5 & 0 & 1 & + \\ \hline 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{16}{3} & 1 & /\cdot(-3) \\ \hline 1 & \boxed{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3} & 0 & + \\ 0 & 1 & 16 & -3 & /\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \\ \hline 1 & 0 & -5 & 1 & \\ 0 & 1 & 16 & -3 & \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 16 & -3 \end{pmatrix} = R^{-1}$$

Berechne nun:

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 16 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 & -3 \\ 80 & -16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 16 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 16 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -16 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} =: D$$

$$\Longrightarrow A = R\,D\,R^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 16 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 16 & -3 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Jordan-Zerlegung

$\rightsquigarrow$ Anwendung z.B. Datenkompression

<u>Fasit:</u>

„A wurde durch eine Ähnlichkeitstransformation auf Diagonalgestalt D transformiert, wobei R aus den EVen und D aus den EWen aufgebaut ist! Durch Umstellen der Transformation erhält man die Jordan-Zerlegung von A."