Organisatorisches

Bitte zunächst unbedingt in ILIAS dem Kurs beitreten (ist stets ohne Password möglich). Dort sind alle Links, Dokumente und organisatorische Details zu finden! Ferner liegen dort vier alte Klausuren mit Lösungen zum Üben sowie werden dort stets die wöchentlichen Vorlesungen und Übungen hochgeladen!

Vorlesung

Zum Einstieg z.B.:

https://www.dms.uni-landau.de/roth/veroeffentlichungen/zahl_i/roth_zahl_i.pdf

Komplexe Multiplikation:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot(-1) - 3\cdot 4 \\ 5\cdot 4 + 3\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Darf man vertauschen?

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 5 - 4\cdot 3 \\ (-1)\cdot 3 + 4\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Ja, $\bullet$ ist kommutativ!

Gibt es ein neutrales Element?

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1 - (-3)\cdot 0 \\ 5\cdot 0 + (-3)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ja, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist neutrales Element bzgl. $\bullet$.

Gibt es multiplikativ inverse Elemente?

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \bullet \underbrace{\begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}}_{} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

multiplikativ inverses Element gesucht

Gemäß Formel im Skript gilt:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{5^2+(-3)^2} \\ \dfrac{-(-3)}{5^2+(-3)^2} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{5}{34} \\ \frac{3}{34} \end{pmatrix}}}$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{5}{34} \\ \frac{3}{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{34} - \left(-\frac{9}{34}\right) \\ \frac{15}{34} + \left(-\frac{15}{34}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

✓ passt!

Berechnung von $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ in komplexer Notation:

$$(5+3i)\cdot(-1+4i) = -5+20i-3i+12\underbrace{i^2}_{=-1}$$
$$= \underline{\underline{-17+17i}}$$

Komplexe Division bzw. multipl. Inverses:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5-3i} \underset{\text{konjugiert komplex erweitern}}{\uparrow =} \frac{1}{5-3i}\,\frac{5+3i}{5+3i}$$

$$= \frac{5+3i}{25+\cancel{15i}-\cancel{15i}-9\underbrace{i^2}_{=-1}}$$

$$= \frac{5+3i}{34}$$

$$= \frac{5}{34} + \frac{3}{34}i$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{34} \\ \frac{3}{34} \end{pmatrix} \checkmark$$

Übung

Aufgabe

Berechnen Sie in klassischer und in i-Notation:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

In klassischer Notation:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-3) - 5 \cdot 4 \\ 2 \cdot 4 + 5 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -26 \\ -7 \end{pmatrix}}}$$

In i-Notation (merke: $i^2 = -1$):

$$(2 + 5i) \cdot (-3 + 4i) =$$

$$= -6 + 8i - 15i + 20\underbrace{i^2}_{= -1} = \underline{\underline{-26 - 7i}}$$

Frage: Wie kommt man auf die Formel für das multiplikativ inverse Element?

Sei $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Suche Inverses

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_1 + i a_2} \cdot \frac{a_1 - i a_2}{a_1 - i a_2}$$

konjugiert komplex erweitern

$$= \frac{a_1 - i a_2}{a_1^2 \cancel{- a_1 a_2 i} \cancel{+ a_1 a_2 i} - \underbrace{i^2}_{=-1} a_2^2}$$

$$= \frac{a_1 - i a_2}{a_1^2 + a_2^2} = \underline{\underline{\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} + \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2} i}}$$

Aufgabe

Berechnen Sie $\dfrac{2+3i}{4-2i}$.

$$\frac{2+3i}{4-2i} =$$

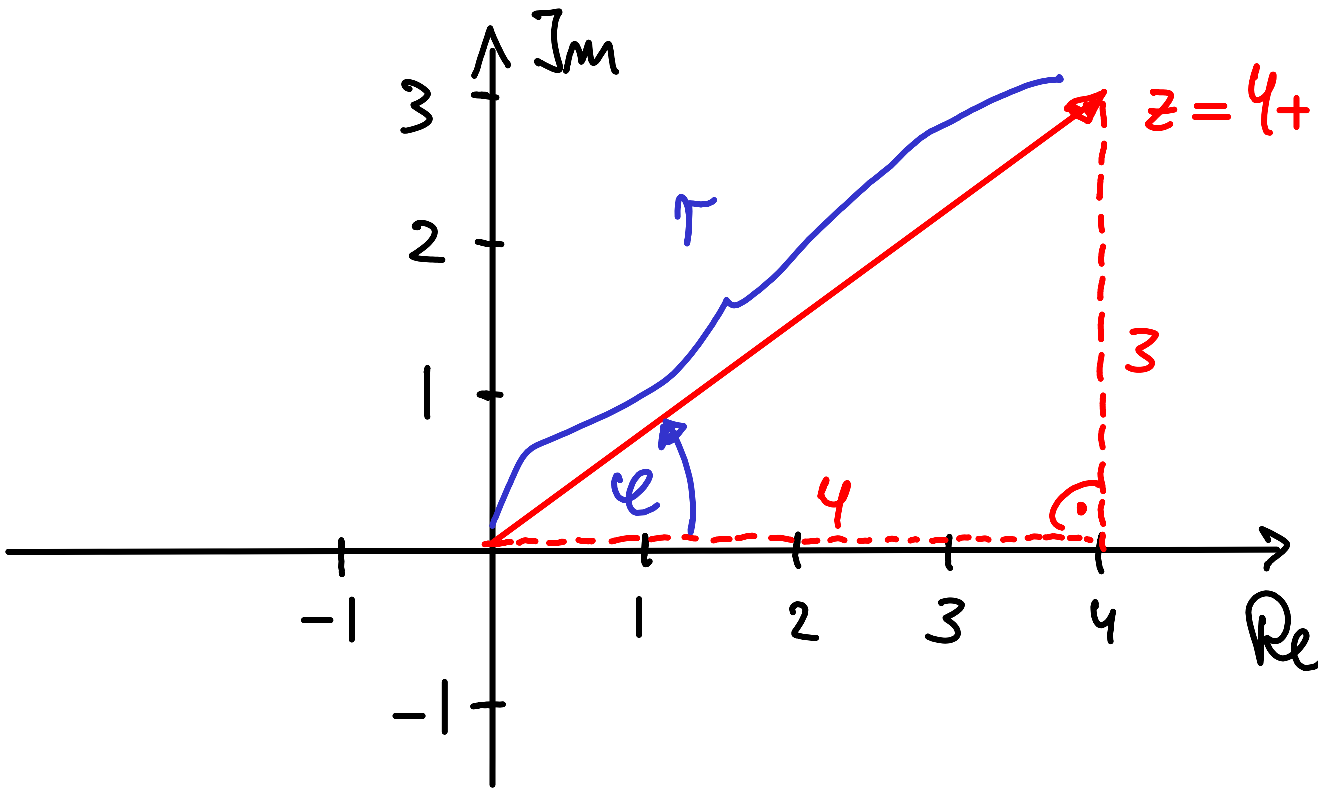
$$= \frac{2+3i}{4-2i} \cdot \frac{4+2i}{4+2i}$$

$$= \frac{8+4i+12i+6i^2}{16+4} = \frac{2+16i}{20}$$

$$= \frac{2}{20} + \frac{16}{20}i = \underline{\underline{\frac{1}{10} + \frac{4}{5}i}}$$

Hinweis: Weitere Aufgaben findet man im pdf-Tool!

Aufgabe Skizzieren Sie $z := 4 + 3i$ und überführen Sie z in die exponentielle Darstellung.



$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\varphi = \arctan \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} = \arctan \frac{3}{4} = 0.643\ldots$$

$$\varphi = \arccos \frac{\operatorname{Re}(z)}{r} = \arccos \frac{4}{5} = 0.643\ldots$$

$$\varphi = \arcsin \frac{\operatorname{Im}(z)}{r} = \arcsin \frac{3}{5} = 0.643\ldots$$

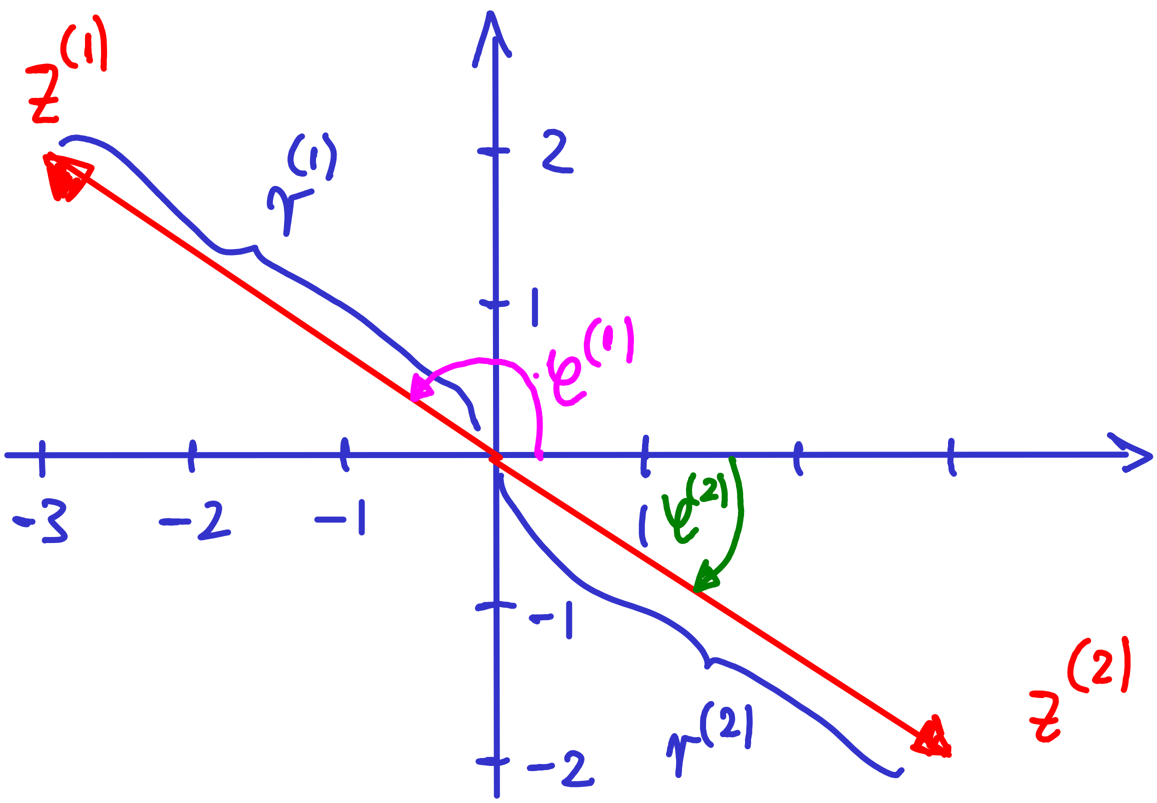
Also: $$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = \underline{\underline{5 e^{i \cdot 0.643\ldots}}}$$

Aufgabe

Überführen Sie $z^{(1)} := -3+2i$ und $z^{(2)} := 3-2i$ in die exponentielle Darstellung (mit Skizze).

Hinweis: $\arctan\left(-\frac{2}{3}\right) = -0.588\ldots$ und

$\pi = 3.141\ldots$



$$r^{(1)} = r^{(2)} = \sqrt{(-3)^2+2^2} = \sqrt{13}$$

$$\varphi^{(1)} = \left(\arctan\frac{2}{-3}\right) + \pi = 2.553\ldots$$

$$\varphi^{(2)} = \arctan\frac{-2}{3} = -0.588\ldots$$

Also: $z^{(1)} = \sqrt{13}\, e^{2.553\ldots i}$

$$z^{(2)} = \sqrt{13}\, e^{5.695\ldots i} = \underbrace{\sqrt{13}}_{\text{Modul}}\, e^{\overbrace{-0.588\ldots i}^{}}$$

Phase

Beachte: $5.695\ldots = -0.588\ldots + 2\pi$

Aufgabe

Überführen Sie $z := 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ in die komplexe Darstellung.

	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
sin	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
cos	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
tan	0	1	/	-1	0

Eulersche Formel:

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

$$2e^{i\frac{\pi}{4}} = \underbrace{(\text{Eulersche Formel})}$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}i$$

$$= \sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$$

Aufgabe

Suche alle 4-ten Wurzeln aus 16.

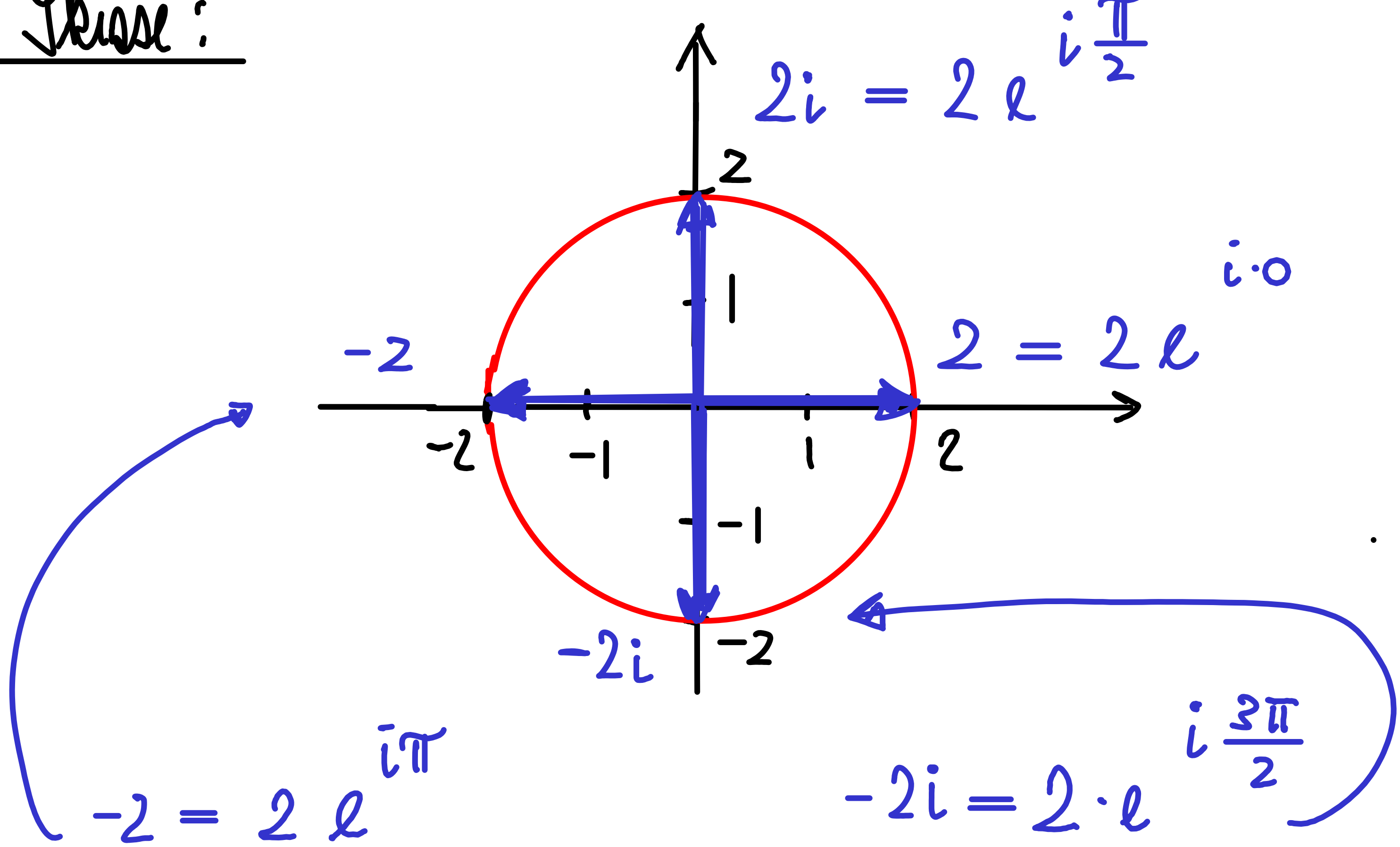
1. Lösung: 2, denn $2^4 = 16$. ✓

2. Lösung: -2, denn $(-2)^4 = 16$. ✓

3. Lösung: $2i$, denn $(2i)^4 = 2^4 \cdot \underbrace{i^4}_{=1} = 16$ ✓

4. Lösung: $-2i$, denn $(-2 \cdot i)^4 = 16$ ✓

Skizze:



Kurz:

1. Schreibe 16 in exp. Notation: $16 = 16e^{0i}$

2.

$$\sqrt[4]{16} = \begin{cases} 2\,e^{i\frac{2\pi}{4}0} \\ 2\,e^{i\frac{2\pi}{4}\cdot 1} \\ 2\,e^{i\frac{2\pi}{4}\cdot 2} \\ 2\,e^{i\frac{2\pi}{4}\cdot 3} \end{cases}$$

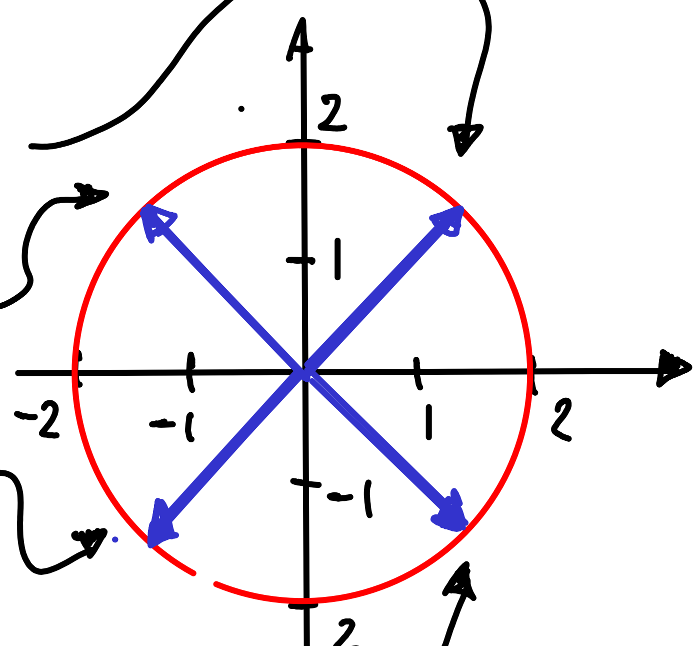
Aufgabe

Berechne alle 4-ten Wurzeln aus -16.

$-16 = 16\,e^{i\pi}$ (exp. Darst.)

Also:

$$\sqrt[4]{-16} = \begin{cases} 2\,e^{\left(i\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}\cdot 0 i\right)} \\ 2\,e^{\left(i\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}\cdot 1 i\right)} \\ 2\,e^{\left(i\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}\cdot 2 i\right)} \\ 2\,e^{\left(i\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}\cdot 3 i\right)} \end{cases}$$



Aufgabe Bestimmen Sie alle 3-ten Wurzeln aus 27.

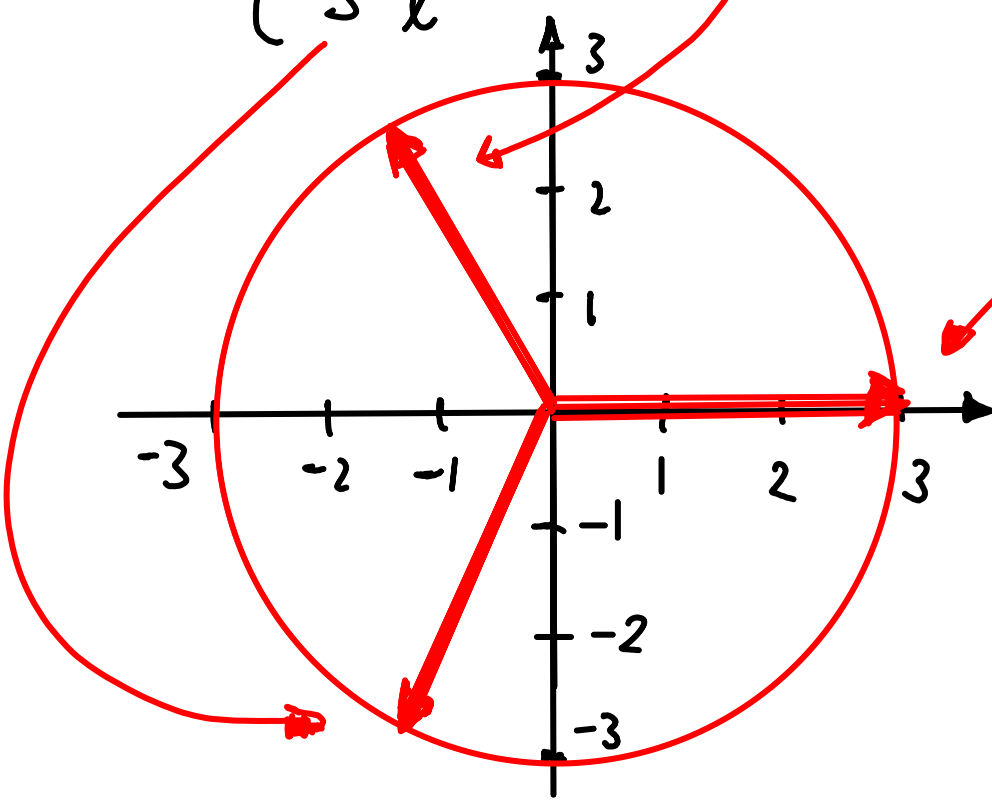
(1) 3, denn $3^3 = 27$ ✓

(2) $3e^{i1\cdot\frac{2\pi}{3}}$, denn $\left(3\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = 27$ ✓

(3) $3e^{i2\cdot\frac{2\pi}{3}}$, denn $\left(3\cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^3 = 27$ ✓

Systematisch kann man dies so interpretieren:

$$\sqrt[3]{27} = \begin{cases} 3e^{\frac{2\pi}{3}i\cdot 0} = 3 \\ 3e^{\frac{2\pi}{3}i\cdot 1} \\ 3e^{\frac{2\pi}{3}i\cdot 2} \end{cases}$$



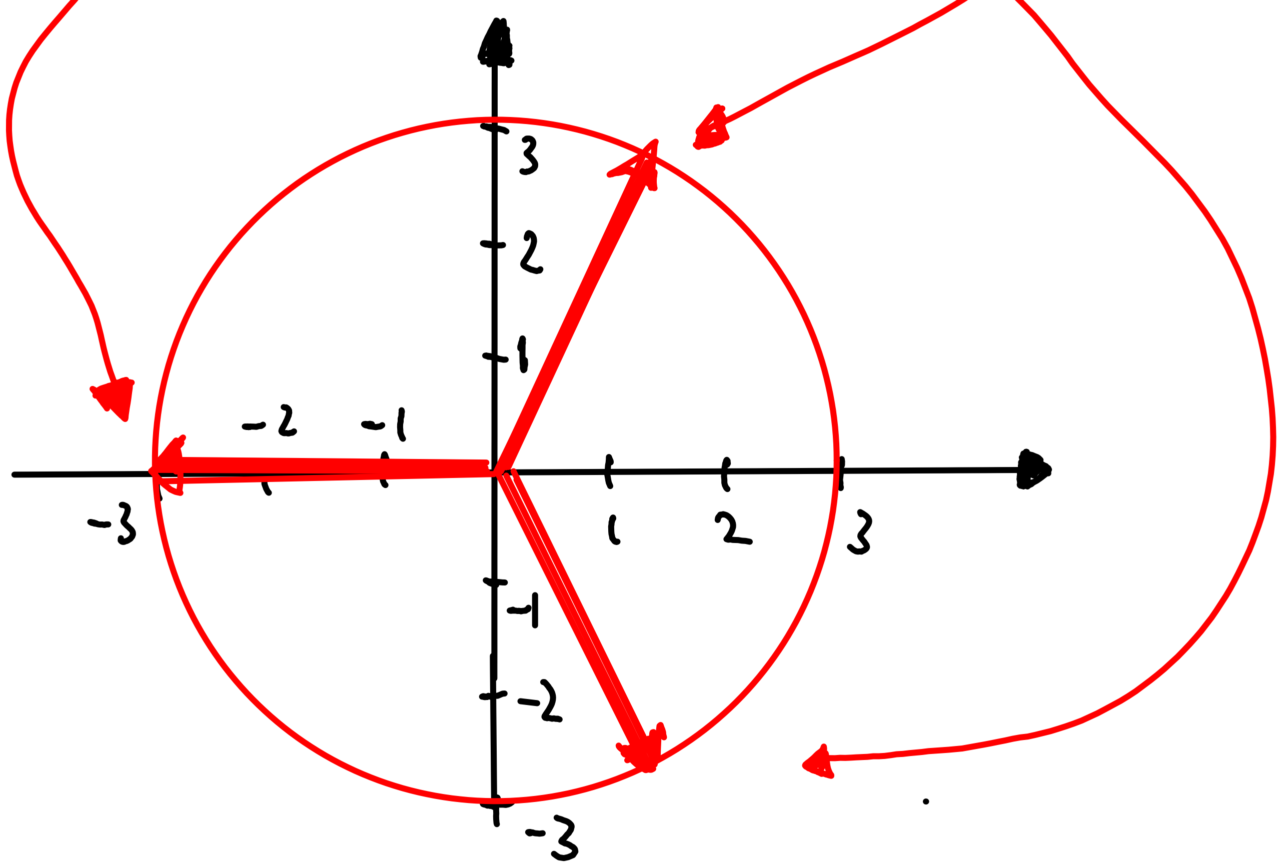
Aufgabe Berechnen Sie alle 3-ten Wurzeln aus -27.

1. Schritt Beschaffe exponentielle Darstellung von -27:

$$-27 = 27\, e^{i\pi}$$

2. Schritt

$$\sqrt[3]{-27} = \begin{cases} 3\, e^{i\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}i\cdot 0} \\ 3\, e^{i\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}i\cdot 1} \\ 3\, e^{i\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}i\cdot 2} \end{cases}$$



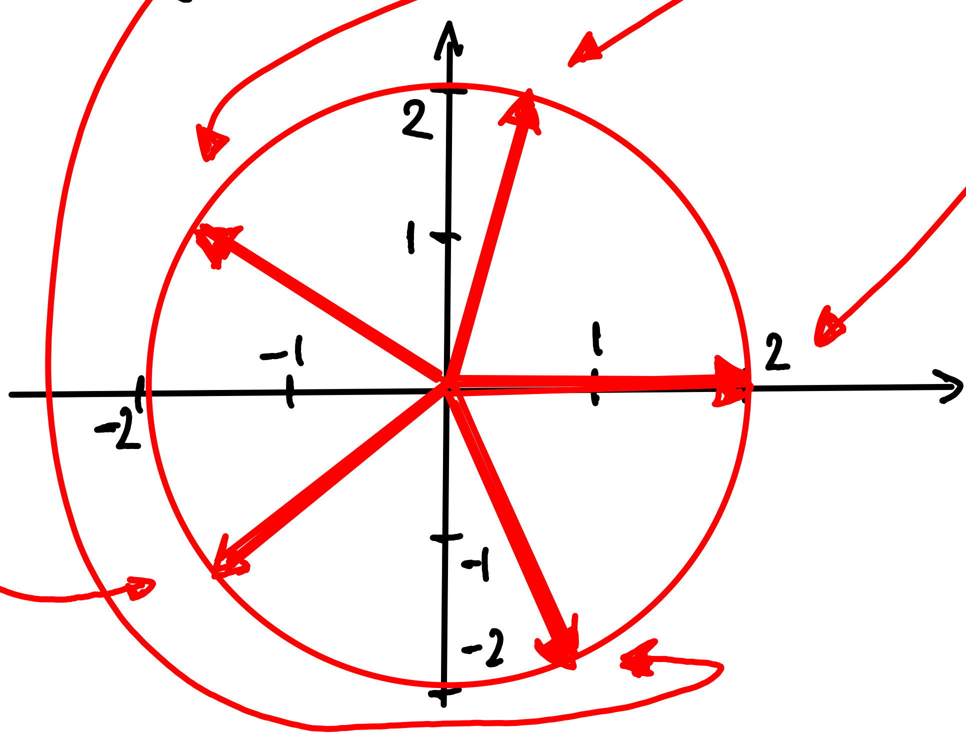
Aufgabe Bestimmen Sie alle 5-ten Wurzeln aus 32.

(1) 2, denn $2^5 = 32$ ✓

(2) $2e^{i\frac{2\pi}{5}}$, denn $\left(2e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5 = 32\cdot\underbrace{e^{i2\pi}}_{=1} = 32$

u.s.w.

$$\sqrt[5]{32} = \left\{\begin{array}{l} 2e^{\frac{2\pi}{5}i\cdot 0} \\ 2e^{\frac{2\pi}{5}i\cdot 1} \\ 2e^{\frac{2\pi}{5}i\cdot 2} \\ 2e^{\frac{2\pi}{5}i\cdot 3} \\ 2e^{\frac{2\pi}{5}i\cdot 4} \end{array}\right.$$



Aufgabe

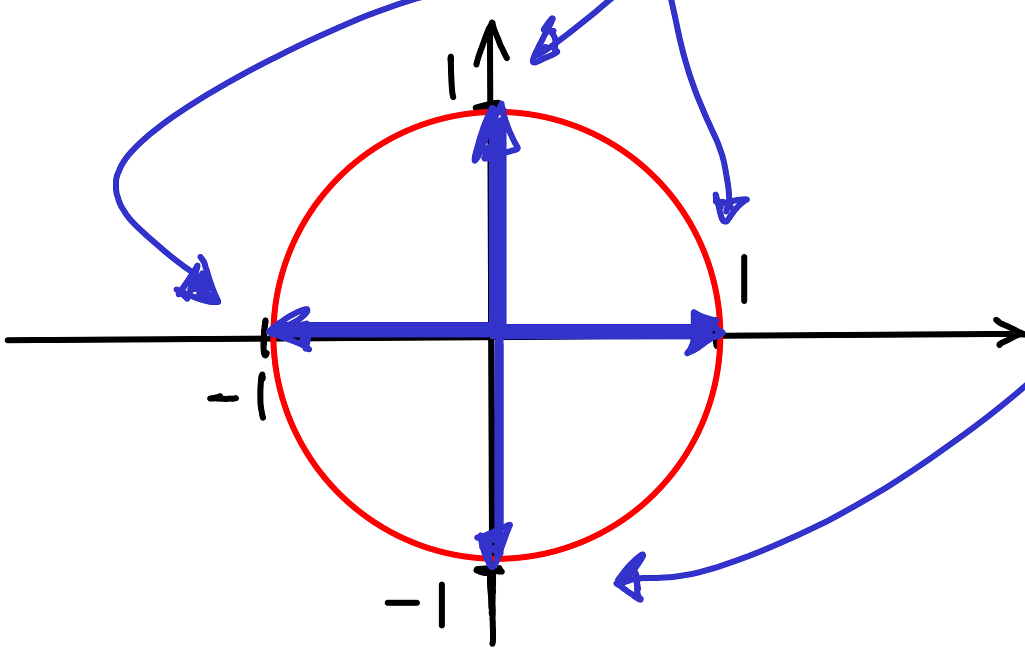
Bestimmen Sie alle 4-ten Wurzeln aus 1.

(1) 1, denn $1^4 = 1$ ✓ $\qquad 1 = 1e^{i\cdot 0}$

(2) −1, denn $(-1)^4 = 1$ ✓ $\qquad -1 = 1e^{i\cdot\pi}$

(3) i, denn $i^4 = 1$ ✓ $\qquad i = 1e^{i\frac{\pi}{2}}$

(4) −i, denn $(-i)^4 = 1$ ✓ $\qquad -i = 1e^{i\frac{3\pi}{2}}$



Aufgabe Berechnen Sie $\sqrt{i}$.

Suche $a, b \in \mathbb{R}$ mit $(a+ib)^2 = i$.

$$a^2 + 2abi - b^2 = i$$

$$\underline{(a^2-b^2)} + \underline{2ab}\,i = \underline{0} + \underline{1}\cdot i$$

$$\left.\begin{array}{l} \Longrightarrow a^2-b^2=0 \\ \Longrightarrow 2ab = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{\sqrt{2}},\ b=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \quad\text{oder} \\ a=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ b=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

„Kompliziert"

Einfachere Lösung mit unserer Exponent-Strategie:

$i = 1\cdot e^{\frac{\pi}{2}i}$ (exp. Darstellung)

$$\sqrt{i} = \left\{\begin{array}{l} 1\cdot e^{\left(\frac{\pi}{4}i + \frac{2\pi}{2}i\cdot 0\right)} \\ 1\cdot e^{\left(\frac{\pi}{4}i + \frac{2\pi}{2}i\cdot 1\right)} \end{array}\right\} = \begin{cases} e^{\frac{\pi}{4}i} \\ e^{\frac{5\pi}{4}i} \end{cases}$$