Vorlesung

Beispiel zum Differenzieren (Wiederholung):

$$\left(\frac{e^x - \sin(x)\cdot\cos(x)}{4x^2+3}\right)'$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ Q}}{=} \frac{\left(e^x - \overbrace{\left(\sin(x)\cdot\cos(x)\right)'}^{h(x)}\right)\left(4x^2+3\right) - \left(e^x - \sin(x)\cos(x)\right)\cdot 8x}{\left(4x^2+3\right)^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$h(x) \underset{\substack{\uparrow \\ P}}{=} \cos(x)\cos(x) + \sin(x)\left(-\sin(x)\right)$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\sin\left(\cos\left(x^2\right)\right)\right)' \underset{\substack{\uparrow \\ K}}{=} \cos\left(\cos\left(x^2\right)\right)\cdot\left(\cos\left(x^2\right)\right)'$$

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$= \cos(\cos(x^2)) \cdot (-\sin(x^2)) \cdot 2x$$

Ableitung von f unter Zugriff auf f^{-1}:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

<u>Ableitung:</u> $\left(f^{-1}(f(x))\right)' = x' \Longrightarrow$

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \Longrightarrow \underline{\underline{f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))}}}$$

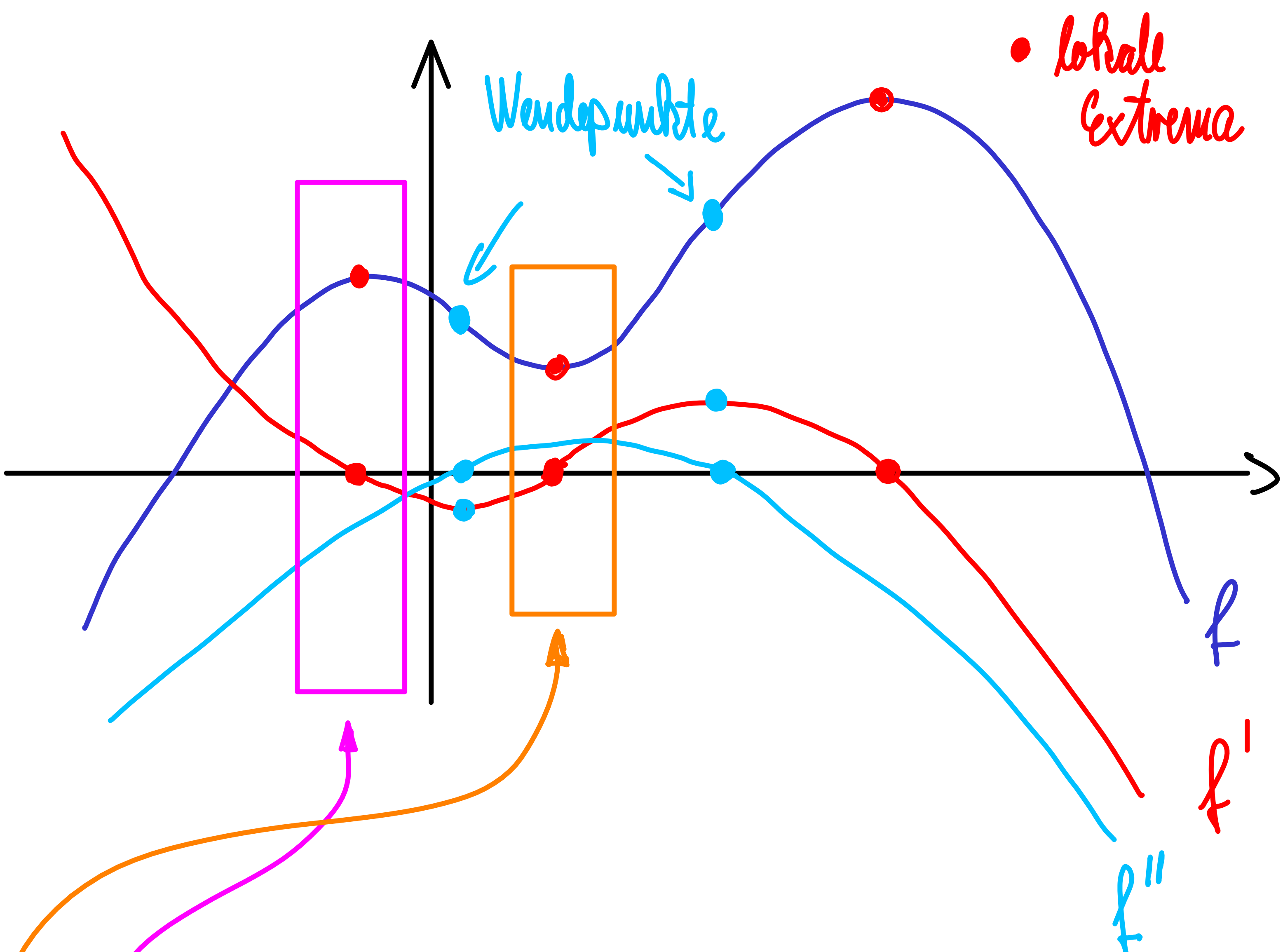
<u>Anwendung:</u>

Suche Ableitung von ln unter Kenntnis der Ableitung von exp:

$$\ln'(x) = (\ln(x))' = \frac{1}{\exp'(\ln(x))}$$

$$= \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \underline{\underline{\frac{1}{x}}}$$

Anwendung der Differentiation / geometrische Interpretation:



x lok. Max. $\rightsquigarrow f'(x) = 0 \rightsquigarrow f''(x) < 0$

x lok. Min. $\rightsquigarrow f'(x) = 0 \rightsquigarrow f''(x) > 0$

Beispiel zur Analyse von Extremalstellen differenzierbarer Funktionen:

$$f(x) := 2x^3 - 12x^2 + 18x - 5$$

$$f'(x) = 6x^2 - 24x + 18$$

$$f''(x) = 12x - 24$$

Suche Nullstellen der Ableitung:

$$f'(x) = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0$$

Also: $x_1 = 1$ oder $x_2 = 3$

An diesen Stellen könnten Extrema sein!

Wir setzen in die zweite Ableitung ein:

$f''(1) = -12 < 0$, also lok. Max. in $x_1 = 1$

$f''(3) = 12 > 0$, also lok. Min. in $x_2 = 3$

Weiteres Beispiel Bestimmen Sie die lokalen Extrema von $p(x) := x^4 - 6x^2 + 8x + 12$.

$$p'(x) = 4x^3 - 12x + 8$$

$$p''(x) = 12x^2 - 12$$

Suche Nullstellen der Ableitung:

$$p'(x) = 0 \iff x^3 - 3x + 2 = 0$$

Rate erste NST: $x_1 = 1$

Polynomdivision von $x-1$:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 0x^2 - 3x + 2) : (x-1) = x^2 + x - 2 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad x^2 - 3x \\
\quad \underline{-(x^2 - x)} \\
\qquad -2x + 2 \\
\qquad \underline{-(-2x + 2)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \implies x_{2/3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2}$$

$$\underline{\underline{x_2}} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}} = \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{x_3}} = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}} = \underline{\underline{-2}}$$

Wegen $p''(1) = 0$ weiß man nichts!

Wegen $p''(-2) = 36 > 0$ folgt lok. Min. bei $\underline{\underline{x_3 = -2}}$

Übung

Kleines Beispiel zum Differenzieren von Umkehrfunktionen:

Suche: $(\arcsin(x))' = ?$

Bekannt: $(\sin(x))' = \sin'(x) = \cos(x)$

Allgemein:

Sei f bijektiv mit Umkehrfunktion f^{-1}.

Dann gilt: $f^{-1}(f(x)) = x$

Ableiten mit Kettenregel:

$$(f^{-1}(f(x)))' = \underbrace{(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1}_{\text{Auflösen nach } f'(x)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))}.$$

Anwendung auf $f(x) := \arcsin(x)$:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))}$$

$$= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}}$$

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Aufgabe

Bestimmen Sie analog die Ableitung von $\sqrt{x}$ unter Zugriff auf die Ableitung von $x^2 =: m_2(x)$:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{m_2'(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

Aufgabe Bestimmen Sie die lokalen Extrema von:

(a) $f(x) := x^4 - x$

$f'(x) = 4x^3 - 1$

$f''(x) = 12x^2$

$$f'(x) = 0 \iff 4x^3 - 1 = 0 \qquad /:4$$

$$x^3 - \frac{1}{4} = 0 \qquad /+\frac{1}{4}$$

$$x^3 = \frac{1}{4} \qquad /\sqrt[3]{\ }$$

$$\underline{\underline{x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}}}$$

$f''\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right) = 12 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)^2 > 0$, also lok. Min.

(b) $f(x) := |x+1|$

lok. Min. bei $x = -1$, obwohl f nicht differenzierbar ist! Skizze ist hilfreich!

(c) $f(x) := x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$

$f'(x) = 0 \iff 3x^2 = 0 \iff \underline{\underline{x = 0}}$

$f''(0) = 0$, oh, schade!

Man weiß nun nichts über eventuelle Extrema! Um das zu entscheiden, müsste man Ableitungen höher Ordnung betrachten. Darauf verzichten wir aber!

Aufgabe

Berechnen Sie die lokalen und globalen Extrema von

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$f(x) := \exp\left(6x^3 - 54x^2 + 144x + 2019\right).$$

$$f'(x) = \left(18x^2 - 108x + 144\right)\exp\left(6x^3 - 54x^2 + 144x + 2019\right)$$

$$f''(x) = \left(36x - 108\right)\exp\left(6x^3 - 54x^2 + 144x + 2019\right)$$
$$+ \left(18x^2 - 108x + 144\right)^2 \exp\left(6x^3 - 54x^2 + 144x + 2019\right)$$

$$f'(x) = 0 \iff$$

$$\left(18x^2 - 108x + 144\right)\underbrace{\exp\left(6x^3 - 54x^2 + 144x + 2019\right)}_{>0} = 0$$

$$\iff 18x^2 - 108x + 144 = 0 \quad /:18$$

$$\iff x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\iff \underline{\underline{x = 2 \lor x = 4}}$$

Wegen $f''(2) = \underbrace{(36\cdot 2 - 108)}_{<0} \underbrace{\exp(6\cdot 2^3 - 54\cdot 2^2 + 144\cdot 2 + 2019)}_{>0}$

ist $f''(2) < 0$, also lokales Maximum in $x = 2$.

Wegen $f''(4) = \underbrace{(36\cdot 4 - 108)}_{>0} \underbrace{\exp(6\cdot 4^3 - 54\cdot 4^2 + 144\cdot 4 + 2019)}_{>0}$

ist $f''(4) > 0$, also lokales Minimum in $x = 4$.

Wegen $\exp(6x^3 - 54x^2 + 144x + 2019) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$

hat f kein globales Maximum!

Wegen $\exp(6x^3 - 54x^2 + 144x + 2019) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$

und $f(4) > 0$ hat f auch kein globales Minimum.

„Skizze der Funktion mit wolframalpha"

„schwierig wegen Overflow"

Aufgabe

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f: (1,19) \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$t \longmapsto \sqrt{t} + \sqrt{20-t}.$$

$$f(t) = \sqrt{t} + \sqrt{20-t}$$
$$= t^{\frac{1}{2}} + (20-t)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(t) = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(20-t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(t) = -\frac{1}{4} t^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}(20-t)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'(t) = 0 \iff \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{2\sqrt{20-t}} = 0$$

$$\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{t}} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{20-t}} \qquad \Big/ \frac{1}{\cdot}$$

$$\sqrt{t} = \sqrt{20-t} \qquad \Big/ \wedge 2$$

$$t = 20-t \qquad \Big/ +t$$

$$2t = 20$$

$$\underline{\underline{t = 10}}$$

$f''(10) = \ \ldots\ldots \ < 0$, also lok. Max. in $t=10$.

„Skizze der Funktion mit wolframalpha"