Fachhochschule Dortmund
University of Applied Sciences and Arts

Studiengang Informatik

Prüfungsfach:	Mathematik für Informatiker 2
Prüfer:	Prof. Dr. Burkhard Lenze
Prüfungstermin:	17.08.2022
Dauer der Prüfung:	90 Minuten
Hilfsmittel:	Ein beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt

Name, Vorname: ______________________________

Matrikel/Platz: __________________ / __________

Unterschrift: ______________________________

Hinweise:

- Füllen Sie zunächst das Deckblatt aus und unterschreiben Sie es! •
- Es gibt insgesamt 6 Aufgaben und maximal 105 Punkte sind erreichbar! •

- Verwenden Sie für die Lösungen nur die gegebenen Blätter! •
- Verwenden Sie einen dokumentenechten Stift (keinen Bleistift)! •
- Lassen Sie bitte alle Blätter im zusammengehefteten Zustand! •
- Geben Sie bei allen Aufgaben den kompletten Lösungsweg an! •
- Ohne den zugehörigen Lösungsweg gibt es stets nur 0 Punkte! •

Bewertungsschlüssel:

Punkte	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50	< 50
Note	1.0	1.3	1.7	2.0	2.3	2.7	3.0	3.3	3.7	4.0	5.0

Ergebnis:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6		**Summe**	**Note**
maximale Punkte	15	15	20	20	15	20		105	
erhaltene Punkte									

Aufgabe 1 *Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:*

(a) $(2-3\mathrm{i})^4$, 5 Punkte

(b) $\dfrac{(1-2\mathrm{i})^2}{(2\mathrm{i}-1)^2}$, 5 Punkte

(c) $\dfrac{1-2\mathrm{i}}{(2-\mathrm{i})^2}$. 5 Punkte

Lösung:

(a)

$$(2-3\mathrm{i})^4 = (-5-12\mathrm{i})^2 = -119+120\mathrm{i}\ ,$$

(b)

$$\frac{(1-2\mathrm{i})^2}{(2\mathrm{i}-1)^2} = 1\ ,$$

(c)

$$\frac{1-2\mathrm{i}}{(2-\mathrm{i})^2} = \frac{1-2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} = \frac{(1-2\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})} = \frac{11-2\mathrm{i}}{25}\ .$$

Aufgabe 2 *Bestimmen Sie die vollständige Faktorisierung der folgenden Polynome:*

5 Punkte

(a) $p(z) := z^2 - 4z - 5$,

10 Punkte

(b) $q(z) := z^3 - 2z^2 - z + 2$.

Lösung:

(a) Mit der p-q-Formel erhält man die beiden Nullstellen

$$z_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2^2 + 5} = 2 \pm 3 ,$$

also $z_1 = -1$ und $z_2 = 5$. Daraus ergibt sich die Faktorisierung von p als

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2) = (z + 1)(z - 5) .$$

(b) Zunächst findet man durch Probieren mit ± 1 und ± 2 die erste Nullstelle $z_1 = 1$. Abdivision von $z - z_1 = z - 1$ liefert

$$\begin{aligned} (z^3 - 2z^2 - z + 2) : (z - 1) &= z^2 \quad \text{Rest } -z^2 - z + 2 , \\ (-z^2 - z + 2) : (z - 1) &= -z \quad \text{Rest } -2z + 2 , \\ (-2z + 2) : (z - 1) &= -2 \quad \text{Rest } 0 . \end{aligned}$$

Man erhält so die Identität $q(z) : (z - 1) = z^2 - z - 2$ bzw. als erste Faktorisierung $q(z) = (z - 1)(z^2 - z - 2)$. Für das noch zu faktorisierende quadratische Polynom liefert die p-q-Formel die Nullstellen

$$z_{2/3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} ,$$

also $z_2 = -1$ und $z_3 = 2$. Daraus ergibt sich die endgültige Faktorisierung von q als

$$q(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = (z - 1)(z + 1)(z - 2) .$$

Name: ________________ Vorname: ________________

Aufgabe 3 *Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A,* 20 Punkte

$$A := \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -6 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie ferner explizit eine reguläre Matrix $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, so dass die Matrix $C^{-1}AC$ Diagonalgestalt hat.
Hinweis: *Ein Eigenwert von A ist doppelt!*

Lösung:

```
Die Matrix A lautete:
 -3  -1  1
  0  -1  0
 -6  -3  2

det(A-lam*E)=(-3-lam)*(-1-lam)*(2-lam) + 0 + 0
             - 1*(-6)*(-1-lam) - 0 - 0
          = (-1-lam)*(lam^2 + lam)
          = (-1-lam)*lam*(lam + 1) = 0

Die Eigenwerte lauten also:
0       -1       -1

EV zu lam_1 = 0 :

 -3  -1  1      r_1      0
  0  -1  0      r_2  =   0
 -6  -3  2      r_3      0

z.B. r^1 = (1,0,3)^T

EV zu lam_2 = lam_3 = -1 :

 -2  -1  1      r_1      0
  0   0  0      r_2  =   0
 -6  -3  3      r_3      0

z.B. r^2 = (0,1,1)^T und r^2 = (1,0,2)^T

Eine mögliche Eigenvektor-Matrix C lautet:
  1        0       1
  0        1       0
  3        1       2
```

Aufgabe 4 *Gegeben sei die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch Angabe ihrer Wirkung auf die Einheitsbasis im $\mathbb{R}^3$, konkret* 20 Punkte

$$L((1,0,0)^T) := (1,2,3)^T \ , \quad L((0,1,0)^T) := (2,4,6)^T \ , \quad L((0,0,1)^T) := (-3,-6,-9)^T \ .$$

Bestimmen Sie $\operatorname{Kern}(L)$ *und* $\operatorname{Bild}(L)$ *sowie eine Basis* $\mathscr{B}_{\operatorname{Kern}(L)}$ *von* $\operatorname{Kern}(L)$ *und eine Basis* $\mathscr{B}_{\operatorname{Bild}(L)}$ *von* $\operatorname{Bild}(L)$. *Geben Sie ferner* $\dim \operatorname{Kern}(L)$ *und* $\dim \operatorname{Bild}(L) = \operatorname{Rang}(L)$ *an.*

Lösung:
Um $\operatorname{Kern}(L)$ zu berechnen, ist das lineare Gleichungssystem

$$x_1(1,2,3)^T + x_2(2,4,6)^T + x_3(-3,-6,-9)^T = (0,0,0)^T$$

zu lösen. Als Lösung erhält man

$$\mathbf{L} = \operatorname{Kern}(L) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} .$$

Also ist zunächst

$$\dim \operatorname{Kern}(L) = 2$$

und aufgrund der Dimensionsformel

$$\operatorname{Rang}(L) = \dim \operatorname{Bild}(L) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Kern}(L) = 3 - 2 = 1$$

und z.B.

$$\mathscr{B}_{\operatorname{Kern}(L)} := \{(-2,1,0)^T, (3,0,1)^T\}$$

eine Basis von $\operatorname{Kern}(L)$. Eine Basis von $\operatorname{Bild}(L)$ kann man schließlich berechnen, indem man die Bilder der Einheitsvektoren zeilenweise mittels Gaußschem Algorithmus reduziert, also

$$\begin{array}{rrrcc}
1 & 2 & 3 & \cdot(-2) & \cdot 3 \\
2 & 4 & 6 & \leftarrow + & | \\
-3 & -6 & -9 & & \leftarrow + \\
\hline
1 & 2 & 3 & & \\
0 & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & &
\end{array}$$

Also gilt z.B.

$$\mathscr{B}_{\operatorname{Bild}(L)} = \{(1,2,3)^T\}$$

und

$$\operatorname{Bild}(L) = \operatorname{Spann}_{\mathbb{R}}\{(1,2,3)^T\}.$$

Aufgabe 5 *Betrachten Sie die Funktion* 15 Punkte

$$f : [-4,4] \to \mathbb{R}\ , \quad x \mapsto 3x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 48x - 7\ .$$

Bestimmen Sie ihre lokalen Extrema in $[-4,4]$ *(ohne eventuelle Randextrema in* -4 *oder* 4*) und geben Sie explizit an, ob es sich um lokale Maxima oder Minima handelt.*

Lösung:
Für diese Funktion ergibt sich zunächst

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 48x - 48$$

und

$$f''(x) = 36x^2 + 24x - 48\ .$$

Aus der notwendigen Bedingung $f'(x) = 0$ erhält man nach Division durch 12 zunächst die Gleichung

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0\ .$$

Rät man für sie z.B. die Nullstelle $x_1 = -1$, dann erhält man nach Abdivision von $(x+1)$ und lösen der quadratischen Gleichung die beiden weiteren Nullstellen zu

$$x_2 = 2$$

und

$$x_3 = -2\ .$$

In diesen drei Punkten könnten Extrema vorliegen. Unter Ausnutzung der hinreichenden Bedingungen erhält man, dass

wegen $f''(-2) = 48 > 0$ an der Stelle -2 ein lokales Minimum vorliegt,

wegen $f''(-1) = -36 < 0$ an der Stelle -1 ein lokales Maximum vorliegt und

wegen $f''(2) = 144 > 0$ an der Stelle 2 erneut ein lokales Minimum vorliegt.

Aufgabe 6 *Differenzieren Sie die folgenden Funktionen:*

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin^2(x)\cos(x),$ 5 Punkte

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(\sin(\cos(x))),$ 5 Punkte

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{\sin(x)\cos(x)}{x^2+\cos^2(x)}.$ 10 Punkte

Lösung:

(a) f ist differenzierbar für alle $x \in \mathbb{R}$, und mit der Produkt- und Kettenregel ergibt sich

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin^2(x))'\cos(x) + \sin^2(x)(\cos(x))' \\ &= 2\sin(x)\cos(x)\cos(x) - \sin^2(x)\sin(x) \\ &= 2\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x). \end{aligned}$$

(b) f ist differenzierbar für alle $x \in \mathbb{R}$, und mit zweimaliger Anwendung der Kettenregel ergibt sich

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos'(\sin(\cos(x)))(\sin(\cos(x)))' \\ &= -\sin(\sin(\cos(x)))\sin'(\cos(x))\cos'(x) \\ &= \sin(\sin(\cos(x)))\cos(\cos(x))\sin(x). \end{aligned}$$

(c) f ist differenzierbar für alle $x \in \mathbb{R}$, und mit der Linearitäts- Quotienten- und Kettenregel ergibt sich

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sin(x)\cos(x))'(x^2+\cos^2(x)) - (\sin(x)\cos(x))(x^2+\cos^2(x))'}{(x^2+\cos^2(x))^2} \\ &= \frac{(\cos^2(x)-\sin^2(x))(x^2+\cos^2(x)) - (\sin(x)\cos(x))(2x+(\cos^2(x))')}{(x^2+\cos^2(x))^2} \\ &= \frac{(\cos^2(x)-\sin^2(x))(x^2+\cos^2(x)) - (\sin(x)\cos(x))(2x-2\cos(x)\sin(x))}{(x^2+\cos^2(x))^2}. \end{aligned}$$