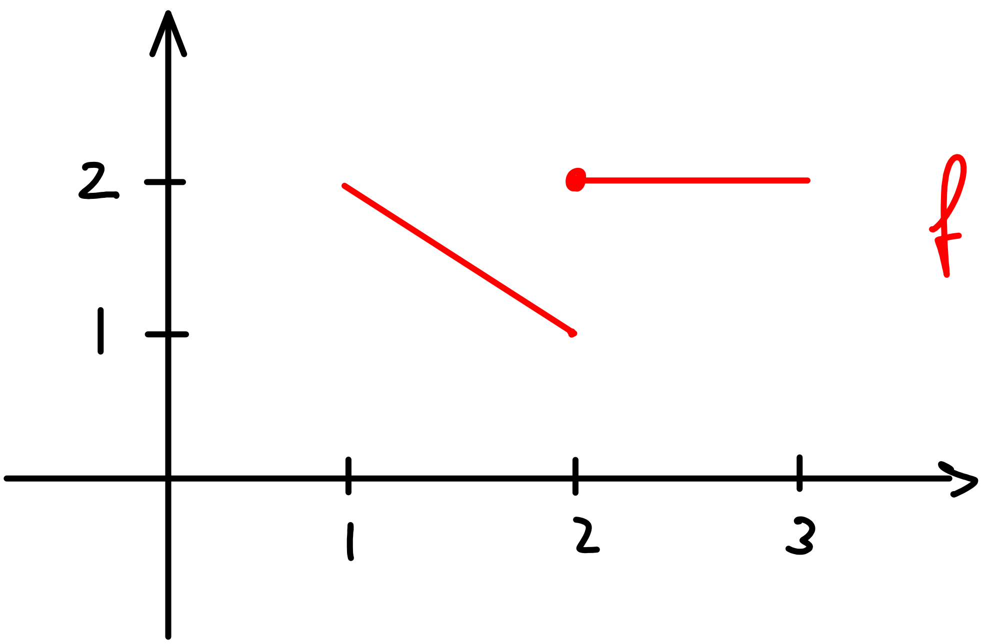
Vorlesung

Beispiel einer unstetigen Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ohne Minimum:



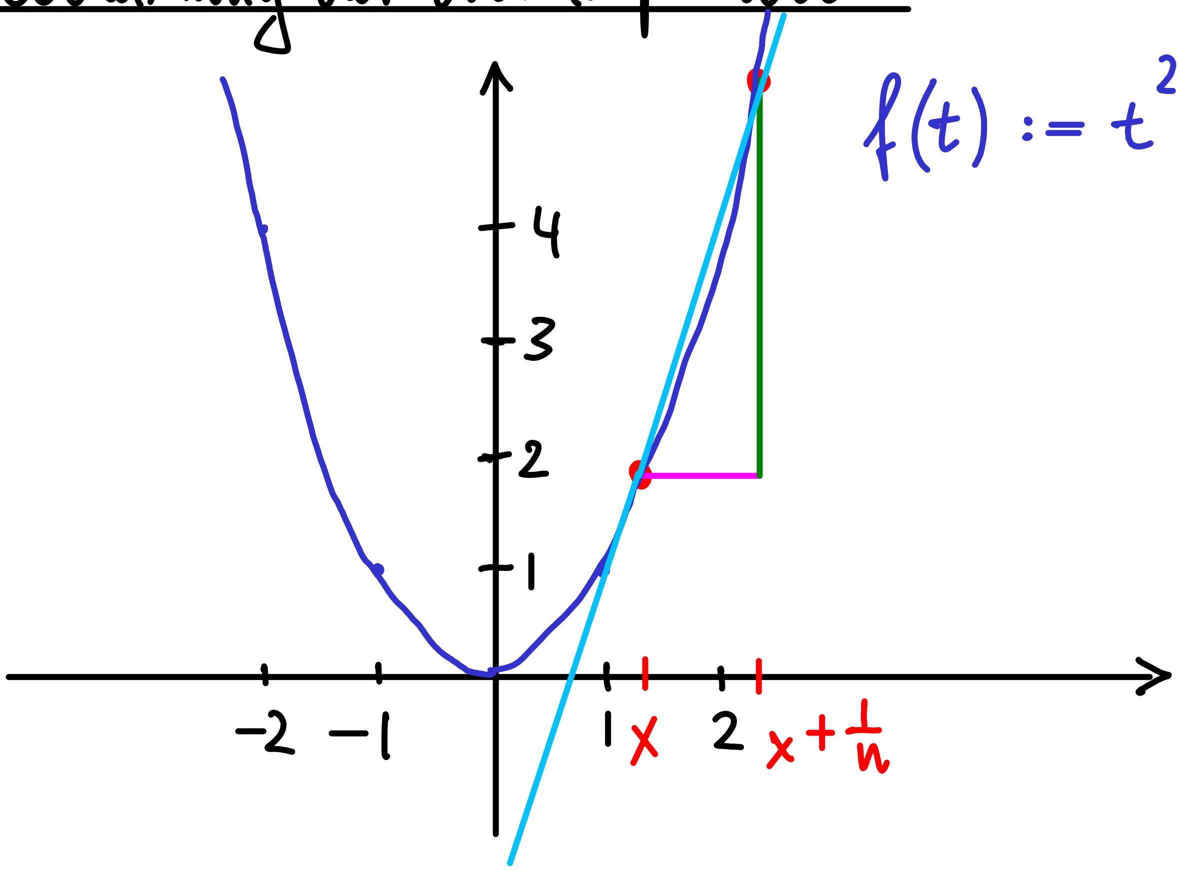
$f : [1,3] \longrightarrow [1,2]$

$$f(x) := \begin{cases} -x+3 & \text{für } x \in [1,2) \\ 2 & \text{für } x \in [2,3] \end{cases}$$

$$\inf \{ f(x) \mid x \in [1,3] \} = 1$$

Es gilt aber keinen Punkt $\underline{z} \in [1,3]$ mit $f(\underline{z}) = 1$ $\rightsquigarrow$ inf wird nicht angenommen bzw. min existiert <u>nicht</u>!

Ableitung der Normalparabel



$$f(t) := t^2$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{x+\frac{1}{n}-x} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x+\frac{1}{n})^2 - x^2}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{x^2} + \frac{2}{n}x + \frac{1}{n^2} - \cancel{x^2}}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(2x + \frac{1}{n}\right) = \underline{\underline{2x}}$$

Ableitung von $f(x) = x^2$,

kurz: $f'(x) = 2x$

Beispiele zum Ableiten

(1) $$\Big(\underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g(x)}\Big)' =$$

$$\underset{\uparrow\, P}{=} \underbrace{\cos(x)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g(x)} + \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \underbrace{e^x}_{g'(x)}$$

$(f \cdot g)' = f'g + fg'$ mit $f(x) := \sin(x)$, $g(x) := e^x$

(2) $$\left(\frac{e^x - \cos(x)}{x^2 + 6}\right)' =$$

$$\underset{\uparrow\, Q}{=} \frac{(e^x + \sin(x)) \cdot (x^2+6) - (e^x - \cos(x)) \cdot 2x}{(x^2+6)^2}$$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ mit $f(x) := e^x - \cos(x)$

$g(x) := x^2 + 6$

(3) $\left(e^{\cos(x)}\right)' = \left(\exp\left(\cos\left(x\right)\right)\right)'$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ K}}{=} e^{\cos(x)} \cdot \left(-\sin(x)\right)$$

$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ mit $f(x) := e^x$, $g(x) := \cos(x)$

(4) $\left(\dfrac{e^{x^2+3} \cdot \sin(x)}{x^2+8}\right)' =$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ Q}}{=} \frac{\left(e^{x^2+3} \cdot \sin(x)\right)' \cdot (x^2+8) - \left(e^{x^2+3} \cdot \sin(x)\right)(x^2+8)'}{(x^2+8)^2}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \quad \uparrow \\ P \quad L}}{=} \frac{\left(\left(e^{x^2+3}\right)' \cdot \sin(x) + e^{x^2+3}\left(\sin(x)\right)'\right)(x^2+8) - \left(e^{x^2+3} \cdot \sin(x)\right)2x}{(x^2+8)^2}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ K}}{=} \frac{\left(e^{x^2+3} \cdot 2x \cdot \sin(x) + e^{x^2+3} \cos(x)\right)(x^2+8) - \left(e^{x^2+3} \cdot \sin(x)\right)2x}{(x^2+8)^2}$$

(5) $\left(8\sin(x)\right)'$

$$\overset{\uparrow}{\underset{L}{=}} \; 8\cos(x)$$

$$\left(8\sin(x)\right)'$$

$$\overset{\uparrow}{\underset{P}{=}} \; \underbrace{(8)'}_{0} \cdot \sin(x) + 8 \cdot \underbrace{\left(\sin(x)\right)'}_{\cos(x)}$$

$$= 8\cos(x)$$

<u>Ableitung der Umkehrfunktion</u>

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x \qquad \Big/ \; '$$

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right) \cdot \left(f(x)\right)' = x' = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right)}$$

Beispiel

$(\sqrt{x})' = ?$ $\qquad f(x) = \sqrt{x}$

$f^{-1}(x) = x^2 \qquad (f^{-1})'(x) = 2x$

Also:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

einfacher:

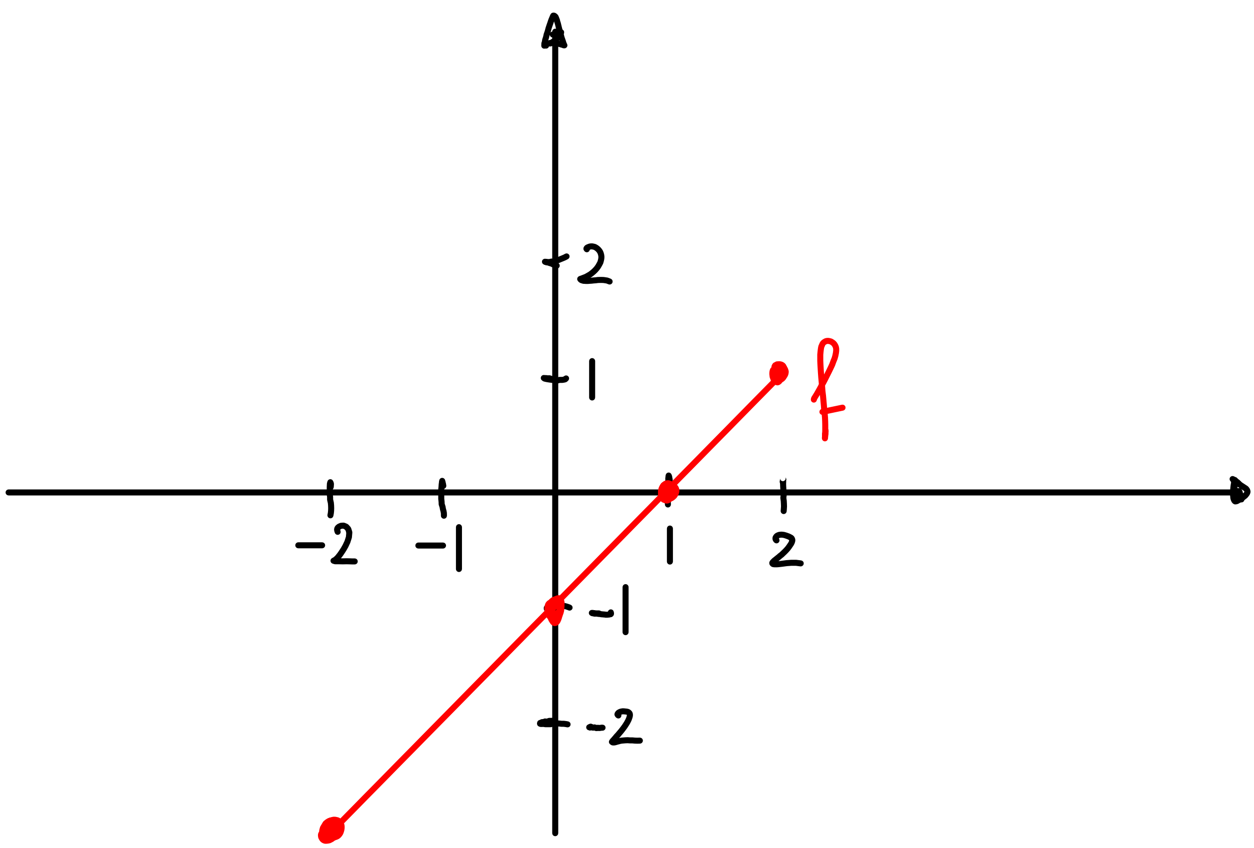
$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Übung

<u>Aufgabe</u> Untersuchen Sie auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit und berechnen Sie ggf. die Ableitung:

(a) $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x - 1$



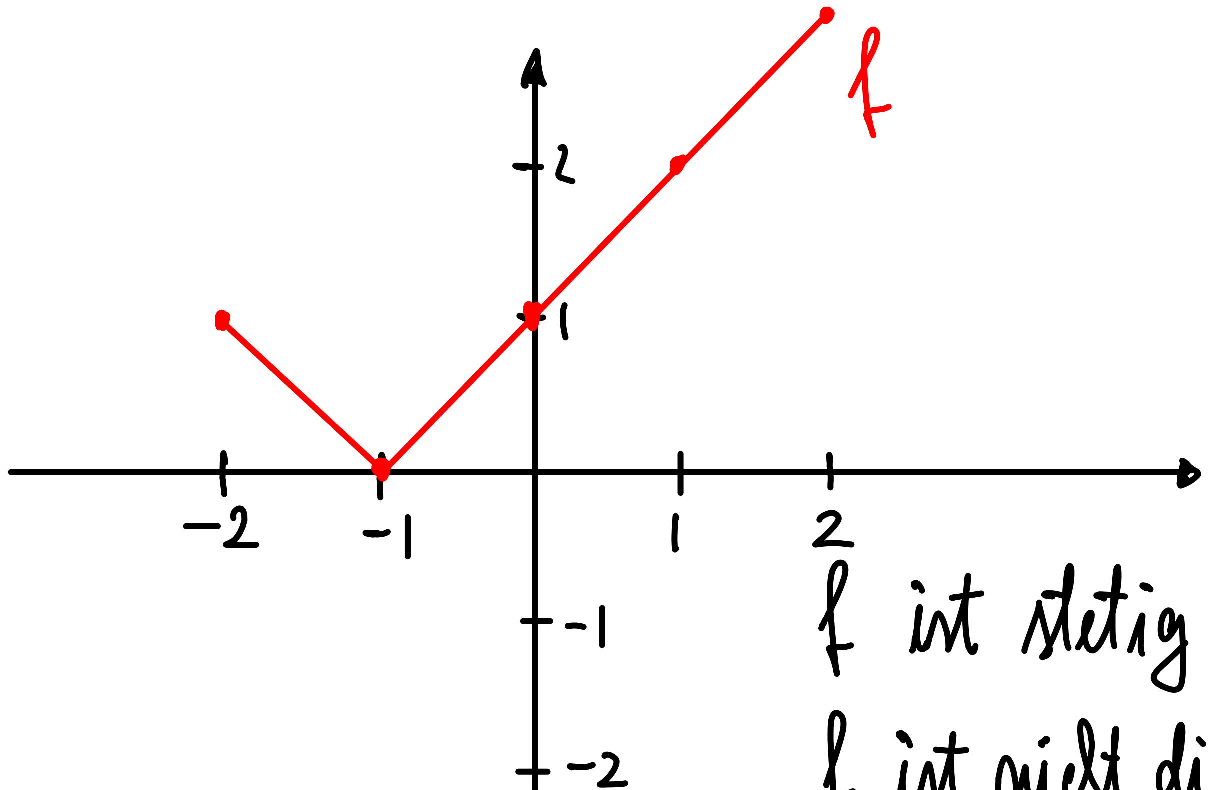
f ist stetig

f ist differenzierbar

$f'(x) = 1$

(b) $f: [-2,2] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto |x+1|$



f ist stetig

f ist nicht differenzierbar, genauer nicht in $x=-1$.

(c) $f(x) := 7x^5 - 4x^3 + 9x^2 - x + 5$

$f'(x) = 35x^4 - 12x^2 + 18x - 1$

$f''(x) = 140x^3 - 24x + 18$

$f'''(x) = 420x^2 - 24$

$f^{(4)}(x) = 840x$

$f^{(5)}(x) = 840$

$f^{(6)}(x) = 0$

(d) $f(x) := e^x \sin(x) - x^4 \cos(x)$

$$f'(x) \underset{\substack{\uparrow \\ L}}{=} \big(\underbrace{e^x}_{f(x)} \underbrace{\sin(x)}_{g(x)}\big)' - \big(x^4 \cos(x)\big)'$$

$$\boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ P}}{=} \underbrace{e^x}_{f'(x)} \underbrace{\sin(x)}_{g(x)} + \underbrace{e^x}_{f(x)} \underbrace{\cos(x)}_{g'(x)} - \big(4x^3 \cos(x) + x^4(-\sin(x))\big)$$

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

(e) $$\left(\frac{\sin(x) - 5x^2}{3x^2 + 5}\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(x) - 5x^2}{3x^2 + 5}\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ Q}}{=} \frac{(\cos(x) - 10x) \cdot (3x^2 + 5) - (\sin(x) - 5x^2) \cdot 6x}{(3x^2 + 5)^2}$$

$$\boxed{(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

(f) $$\left(e^{\cos(x) \sin(x)}\right)' = \big(\exp(\cos(x) \cdot \sin(x))\big)'$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ K}}{=} e^{\cos(x) \sin(x)} \cdot \big(\cos(x) \cdot \sin(x)\big)'$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ P}}{=} e^{\cos(x) \sin(x)} \big((-\sin(x)) \sin(x) + \cos(x) \cos(x)\big)$$

Merkregel: In Abhängigkeit von der letzten Operation bei der Auswertung der zu differenzierenden Funktion ist die zuerst anzuwendende Ableitungsregel zu wählen:

Addition oder Subtraktion	$\rightsquigarrow$	Linearitätsregel (L)
Multiplikation	$\rightsquigarrow$	Produktregel (P)
Division	$\rightsquigarrow$	Quotientenregel (Q)
Funktionsaufruf	$\rightsquigarrow$	Kettenregel (K)

Aufgabe

$$\left(\frac{\cos(\sin(e^{4x}))}{5+\cos^2(x)\sin^2(x)}\right)'$$

$$\overset{Q}{=} \frac{\underbrace{\left(\cos\left(\sin\left(e^{4x}\right)\right)\right)'}_{u(x)}\left(5+\cos^2(x)\sin^2(x)\right) - \left(\cos\left(\sin\left(e^{4x}\right)\right)\right)\overbrace{\left(5+\cos^2(x)\sin^2(x)\right)'}^{v(x)}}{\left(5+\cos^2(x)\sin^2(x)\right)^2}$$

$$u(x) \underset{\substack{\uparrow \\ K}}{=} -\sin\left(\sin\left(e^{4x}\right)\right)\cdot\left(\sin\left(e^{4x}\right)\right)'$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ K}}{=} -\sin\left(\sin\left(e^{4x}\right)\right)\cdot\cos\left(e^{4x}\right)\cdot\left(e^{4x}\right)'$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ K}}{=} -\sin\left(\sin\left(e^{4x}\right)\right)\cdot\cos\left(e^{4x}\right)\cdot e^{4x}\cdot 4$$

$$v(x) = \left(5+\cos^2(x)\sin^2(x)\right)'$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ L}}{=} 0 + \left(\cos^2(x)\cdot\sin^2(x)\right)'$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ P}}{=} \left(\cos^2(x)\right)'\cdot\sin^2(x) + \cos^2(x)\left(\sin^2(x)\right)'$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ K}}{=} 2\cdot\cos(x)\cdot(-\sin(x))\cdot\sin^2(x) + \cos^2(x)\cdot 2\sin(x)\cdot\cos(x)$$

Aufgabe

Differenziere $p(x) := (2x^2+7)^2$ mit Hilfe

- der Produktregel,
- der Kettenregel,
- der Linearitätsregel (nach Ausmultiplikation).

Man mache sich klar, dass man stets dieselbe Ableitung erhält!

(1) Produktregel:

$$\left((2x^2+7)^2\right)' = \left((2x^2+7)\cdot(2x^2+7)\right)'$$

$$\underset{\uparrow \atop P}{=} 4x(2x^2+7) + (2x^2+7)4x$$

$$= 16x^3 + 56x.$$

(2) Kettenregel:

Dazu sei $m_2(x) := x^2$. Dann gilt mit $m_2'(x) = 2x$:

$$\left(\left(2x^2+7\right)^2\right)' = \left(m_2\left(2x^2+7\right)\right)'$$

$$\underset{K}{=} \; m_2'\left(2x^2+7\right)\cdot\left(2x^2+7\right)'$$

$$= 2\left(2x^2+7\right)\cdot 4x$$

$$= 16x^3+56x.$$

(3) Linearitätsregel (nach Ausmultiplikation):

$$\left(\left(2x^2+7\right)^2\right)' = \left(4x^4+28x^2+49\right)'$$

$$\underset{L}{=} \; 16x^3+56x.$$

Aufgabe

(a) $\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)'$

$$= \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

Q

(b) $\left(\frac{1}{x}\right)'$

$$= \frac{0\cdot x - 1\cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Q

Einfacher: $\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = (-1)\,x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

Allgemein: $\boxed{(x^n)' = n\,x^{n-1}}$