Vorlesung

Beispiel zur partiellen Integration

$$\int_1^3 x\, e^x \, dx =$$

$$\boxed{\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = \left[f(x)\, g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx}$$

$$\int_1^3 \underbrace{x}_{g(x)}\, \underbrace{e^x}_{f'(x)} \, dx =$$

$$= \left[\underbrace{e^x}_{f(x)} \underbrace{x}_{g(x)}\right]_1^3 - \int_1^3 \underbrace{e^x}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)} \, dx$$

$$= 3e^3 - e - \left[e^x\right]_1^3$$

$$= 3e^3 - e - \left(e^3 - e\right) = \underline{\underline{2e^3}}$$

Beispiel zur Substitution

$$\int_1^3 e^{x^2+2x}(x+1)\,dx =$$

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx}$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 \underbrace{\exp}_{f}\left(\underbrace{x^2+2x}_{g(x)}\right)\underbrace{(2x+2)}_{g'(x)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\underbrace{1^2+2\cdot 1}_{g(a)}}^{\overbrace{3^2+2\cdot 3}^{g(b)}} \underbrace{\exp(x)}_{f(x)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^x\right]_3^{15} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\left(e^{15}-e^3\right)}}$$

Online-Tipp:

https://www.ableitungsrechner.net/

https://www.integralrechner.de/

Etwas zum Knobeln: $\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx = \,?$

Übung

<u>Aufgabe</u> Berechnen Sie mittels partieller Integration oder Substitution die folgenden Integrale.

Zur Erinnerung:

$$\int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt = \Big[f(t)\,g(t)\Big]_a^b - \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt \qquad \text{(PI)}$$

$$\int_a^b f(g(t))\cdot g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx \qquad \text{(SR)}$$

(a) $$\int_{-2}^{2} \underbrace{2t}_{g'(t)}\ \underbrace{\ln}_{f}\big(\underbrace{t^2+5}_{g(t)}\big)\,dt$$

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$$

$g(2) = 2^2+5 = 9$

$$= \int_{9}^{9} \underbrace{\ln(x)}_{f(x)}\,dx = \underline{\underline{0}}$$

$g(-2) = (-2)^2+5 = 9$

(b) $$\int_{-1}^{4} \underbrace{x^2}_{g(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{f'(x)} \, dx$$

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = \Big[f(x)\, g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$$

$$= \Big[\underbrace{x^2}_{g(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{f(x)}\Big]_{-1}^{4} - \int_{-1}^{4} \underbrace{\overbrace{2 \cdot x}^{g'(x)}}_{g(x)} \, \underbrace{\overbrace{e^x}^{f(x)}}_{f'(x)} \, dx \qquad (P1)$$

$$= 16e^4 - e^{-1} - \left(\Big[2xe^x\Big]_{-1}^{4} - \int_{-1}^{4} 2e^x \, dx \right)$$

$$= 16e^4 - e^{-1} - \left(8e^4 - \left(-2e^{-1}\right) - \Big[2e^x\Big]_{-1}^{4} \right)$$

$$= 16e^4 - e^{-1} - 8e^4 - 2e^{-1} + 2e^4 - 2e^{-1}$$

$$= 10e^4 - 5e^{-1}$$

(c) $$\int_{-1}^{4} x \cdot e^{x^2}\,dx = \int_{-1}^{4} x \cdot \exp(x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{4} \underbrace{2x}_{g'(x)} \cdot \underbrace{e}_{f}^{\overbrace{x^2}^{g(x)}}\,dx$$

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{(-1)^2}^{4^2} e^{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{x}\right]_{1}^{16} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\left(e^{16} - e\right)}}.$$

(d) $$\int_{-1}^{4} x^2 e^{x^2}\,dx = ??$$

„geht nicht mit Bordmitteln"

(e) Trigonometrische Integrale

Seien $n, m \in \mathbb{N}$ beliebig. Zeigen Sie:

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \cos(mx)\, dx = 0.$$

Fall $n = m = 0$:

$$\int_0^{2\pi} 0 \cdot 1\, dx = 0 \quad \checkmark$$

Fall $n = 0,\ m > 0$:

$$\int_0^{2\pi} 0 \cdot \cos(mx)\, dx = 0 \quad \checkmark$$

Fall $n > 0,\ m = 0$:

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot 1\, dx = \left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{2\pi} = 0 \ \checkmark$$

Fall $n>0,\ m>0$:

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \underbrace{\sin(nx)}_{f'(x)}\, \underbrace{\cos(mx)}_{g(x)}\, dx} =: I_{m,n}$$

$$= \underbrace{\Big[\underbrace{-\frac{1}{n}\cos(nx)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos(mx)}_{g(x)}\Big]_0^{2\pi}}_{=0} - \int_0^{2\pi} \underbrace{-\frac{1}{n}\cos(nx)}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-m\sin(mx))}_{g'(x)}\, dx$$

$$= -\frac{m}{n} \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin(mx)}_{g(x)}\, \underbrace{\cos(nx)}_{f'(x)}\, dx$$

$$= -\frac{m}{n}\left(\underbrace{\Big[\dots\Big]_0^{2\pi}}_{=0} - \int_0^{2\pi} m\cos(mx)\,\frac{1}{n}\sin(nx)\, dx\right)$$

$$\boxed{= \frac{m^2}{n^2} \int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)\, dx}$$

Also: $\quad I_{m,n} = \frac{m^2}{n^2} I_{m,n}$ bzw.

$$\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right) I_{m,n} = 0 \quad , \text{ also}$$

$$\underline{\underline{I_{m,n} = 0 \quad \text{falls } m \neq n.}}$$

Noch zu bearbeitender Fall:

<u>$m = n$ und $m > 0$, $n > 0$:</u>

<u>Als Übung empfohlen!</u>

Aufgabe

Berechnen Sie $\int_1^4 x \ln(x)\, dx$.

$$\int_1^4 \underbrace{x}_{f'(x)} \underbrace{\ln(x)}_{g(x)}\, dx \qquad \int_a^b f'(x) g(x)\, dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x)\, dx$$

$$= \left[\underbrace{\tfrac{1}{2}x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g(x)}\right]_1^4 - \int_1^4 \underbrace{\tfrac{1}{2}x^2}_{f(x)} \underbrace{\tfrac{1}{x}}_{g'(x)}\, dx$$

$$= 8\ln(4) - \int_1^4 \tfrac{1}{2}x\, dx$$

$$= 8\ln(4) - \left[\tfrac{1}{4}x^2\right]_1^4$$

$$= 8\ln(4) - \left(4 - \tfrac{1}{4}\right)$$

$$= 8\ln(4) - \tfrac{15}{4}$$

Aufgabe

Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^\pi x \sin(3x)\,dx$.

$$\int_0^\pi \underbrace{x}_{g(x)} \underbrace{\sin(3x)}_{f'(x)}\,dx \qquad \int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

$$= \Big[\underbrace{x}_{g(x)}\cdot\underbrace{\left(-\tfrac{1}{3}\cos(3x)\right)}_{f(x)}\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{1}_{g'(x)}\cdot\underbrace{\left(-\tfrac{1}{3}\cos(3x)\right)}_{f(x)}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\pi + \underbrace{\left[\frac{1}{9}\sin(3x)\right]_0^\pi}_{=0}$$

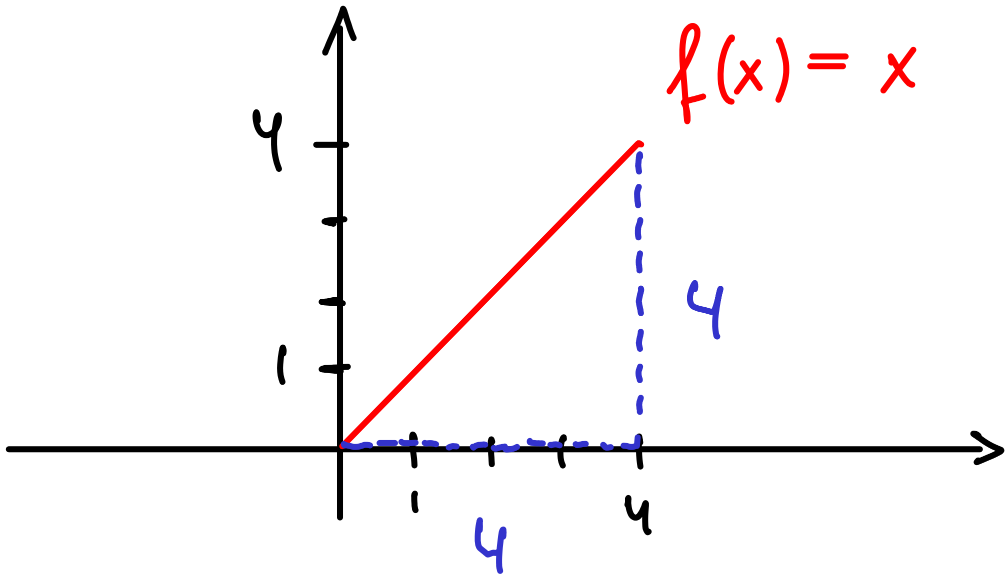
$$= \underline{\underline{\frac{1}{3}\pi}}$$

Aufgabe

Berechnen Sie die Länge des Graphen der Funktion

$$f: [0,4] \to \mathbb{R},$$
$$x \mapsto x.$$

Skizze:



Pythagoras:

$$L(f,[0,4]) = \sqrt{4^2 + 4^2} = \underline{\underline{\sqrt{32}}}$$

Analytisch:

$$L(f,[0,4]) = \int_0^4 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{1+1}\, dx$$

$$\underline{\underline{= 4 \cdot \sqrt{2}}} \qquad \underline{\underline{= \sqrt{32}}} \qquad \checkmark \text{ o.K.}$$

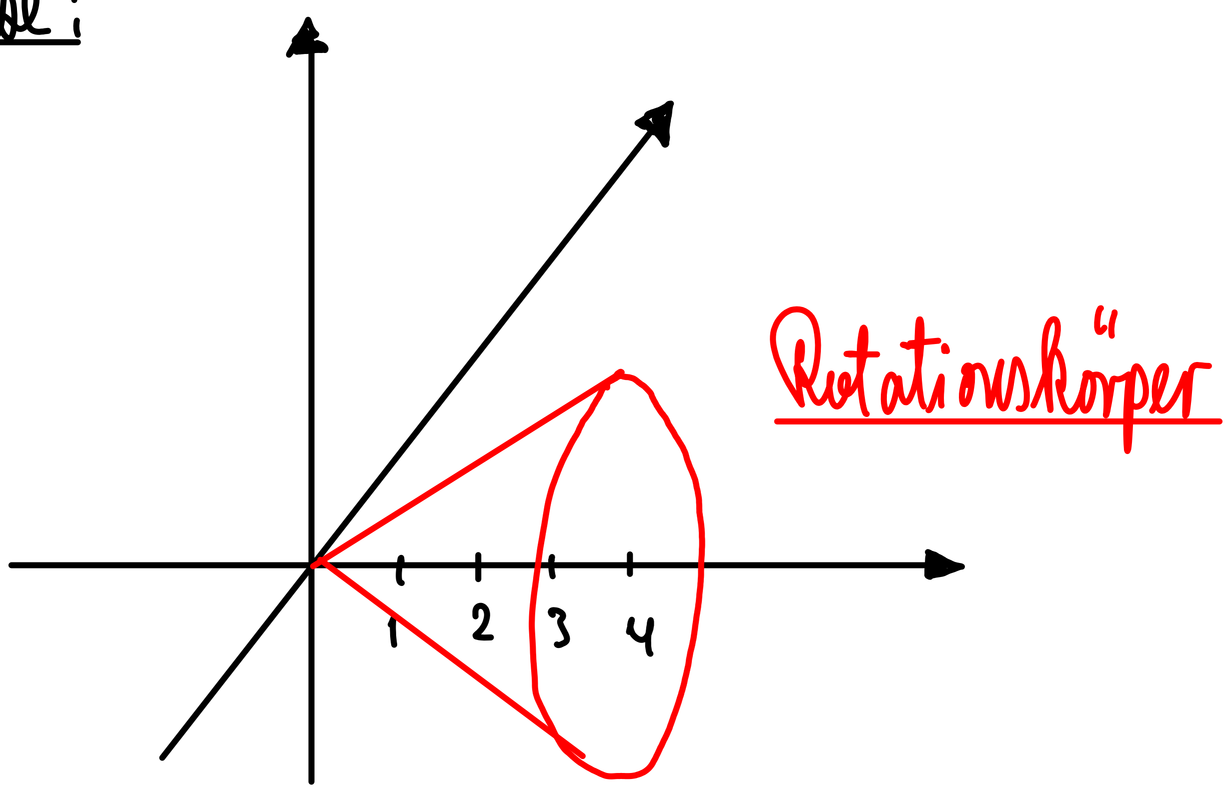
Aufgabe

Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der durch die Funktion

$$f : [0,4] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x,$$

definiert ist.

Skizze:



Es entsteht ein Kegel, dessen Volumen elementar berechenbar ist: „ $\frac{1}{3}$ · Grundfläche · Höhe".

<u>Also:</u> $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 4 = \underline{\underline{\frac{64}{3}\pi}}$

Analytisch über unsere Formel für Rotationskörper erhalten wir:

$$V = \pi \int_0^4 \left(f(x)\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^4 x^2 dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^4 = \underline{\underline{\frac{64}{3}\pi}} \quad \checkmark \text{ o.K.}$$