Vorlesung

Betrachte Polynom p,

$$p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2+1 \quad \text{„Parabel"}$$

Betrachte nun verallgemeinernd p als komplexe Funktion:

$$p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto z^2+1$$

$$p(0) = 1, \quad p(-1) = 2, \quad \underbrace{p(i) = 0, \quad p(-i) = 0}_{\text{Nullstellen gefunden!}}$$

Wie kann man sich das veranschaulichen?

Lösung: Betrachte $|p|$ statt p!

$$|p|: \mathbb{C} \to [0,\infty), \quad z \mapsto |z^2+1|$$

Setze $z := a + bi$:

$$|p(z)| = |p(a+bi)| = |(a+bi)^2+1|$$
$$= |a^2+2abi-b^2+1|$$

$$= \left| (a^2 - b^2 + 1) + 2ab\,i \right|$$

$$= \sqrt{(a^2 - b^2 + 1)^2 + 4a^2b^2}$$

„Plot siehe Skript!"

Beispiel (mit pdf-Tool generiert)

Faktorisiere $p(z) := z^4 + 4z^3 + 10z^2 + 12z + 5$

Teste negative Teiler von 5 als NST:

$p(-1) = 1 - 4 + 10 - 12 + 5 = 0$ ✓

Abdivision von $(z-(-1)) = (z+1)$:

$$(z^4 + 4z^3 + 10z^2 + 12z + 5) : (z+1) = z^3 + 3z^2 + 7z + 5$$

$$-(z^4 + z^3)$$

$$3z^3 + 10z^2$$

$$-(3z^3 + 3z^2)$$

$$7z^2 + 12z$$

$$-(7z^2 + 7z)$$

$$5z + 5$$

$$-(5z + 5)$$

$$0$$

Fazit: $p(z) = (z+1)\underbrace{(z^3+3z^2+7z+5)}_{q(z)}$

Suche NST von q:

$q(-1) = -1+3-7+5 = 0$ ✓ (doppelte NST von p)

Polynomdivision von $(z-(-1)) = (z+1)$:

$$
\begin{array}{l}
(z^3+3z^2+7z+5):(z+1) = z^2+2z+5 \\
\underline{-(z^3+z^2)} \\
\quad 2z^2+7z \\
\quad \underline{-(2z^2+2z)} \\
\qquad\quad 5z+5 \\
\qquad\quad \underline{-(5z+5)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Suche NST von z^2+2z+5:

$$
\begin{aligned}
z^2+2z+5 &= 0 \qquad \Big/ -5+1 \\
z^2+2z+1 &= -4 \\
(z+1)^2 &= -4 \qquad \Big/ \sqrt{\ } \\
z+1 &= \pm\sqrt{-4} = \pm 2i
\end{aligned}
$$

$z_3 = -1+2i \quad , \quad z_4 = -1-2i$

Also ergibt sich:

$$p(z) = (z+1)^2 \left(z-(-1+2i)\right)\left(z-(-1-2i)\right)$$

Konjugation von Summen und Produkten

$$z_1 := a + ib$$
$$z_2 := c + id$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+c) + i(b+d)}$$
$$= (a+c) - i(b+d)$$
$$= (a - ib) + (c - id)$$
$$= \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a+ib)\cdot(c+id)}$$
$$= \overline{ac + iad + ibc + \underbrace{i^2}_{=-1}bd}$$
$$= \overline{(ac - bd) + i(ad + bc)}$$
$$= (ac - bd) - i(ad + bc)$$
$$= ac - bd - adi - bci$$
$$= (a - bi)\cdot(c - di)$$
$$= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

Übung

Aufgabe Faktorisieren Sie

$$p(z) := z^3 - 7z^2 + 17z - 15 .$$

Suche: $p(3) = 27 - 63 + 51 - 15 = 0$ ✓

Offenbar ist $z_1 = 3$ eine NST.

Division von $(z - z_1) = (z-3)$:

$$
\begin{array}{l}
(z^3 - 7z^2 + 17z - 15) : (z-3) = z^2 - 4z + 5 \\
\underline{-(z^3 - 3z^2)} \\
\quad -4z^2 + 17z \\
\quad \underline{-(-4z^2 + 12z)} \\
\qquad 5z - 15 \\
\qquad \underline{-(5z - 15)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$z^2 - 4z + 5 = 0$$

p/q-F: $\quad z_{2/3} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 5}$

$$z_{2/3} = 2 \pm \sqrt{-1}$$

$$z_{2/3} = 2 \pm i$$

Also: $\underline{\underline{z_2 = 2+i}}$; $\underline{\underline{z_3 = 2-i}}$

$$\underline{\underline{p(z) = (z-3)\cdot(z-(2+i))\cdot(z-(2-i))}}$$

<u>Zusatzproblem:</u> Für $z = a+ib$ berechne man

$$|p(z)| = |p(a+ib)|$$

$$= \left|(a+ib)^3 - 7(a+ib)^2 + 17\cdot(a+ib) - 15\right|$$

$$= \left| a^3 + 3a^2 ib + 3a(ib)^2 + (ib)^3 - 7(a^2 + 2abi + (ib)^2) + 17a + 17bi - 15 \right|$$

$$= \left| (a^3 - 3ab^2 - 7a^2 + 7b^2 + 17a - 15) + i(3a^2b - b^3 - 14ab + 17b) \right|$$

$$= \sqrt{\left(a^3-3ab^2-7a^2+7b^2+17a-15\right)^2 + \left(3a^2b-b^3-14ab+17b\right)^2}\,.$$

Tipp: Visualisieren mit www.wolframalpha.com

Aufgabe

Faktorisieren Sie

$$p(z) = z^4-5z^3+6z^2+16z-48\,.$$

Rate:
$$p(-2) = 16+40+24-32-48 = 0 \checkmark$$
$$p(3) = 81-135+54+48-48 = 0 \checkmark$$

NST: $z_1=-2\,,\ z_2=3$

Abdivision: $(z-z_1)(z-z_2) = (z+2)(z-3)$
$$= z^2-z-6$$

Damit ergibt sich:

$$\left(z^4 - 5z^3 + 6z^2 + 16z - 48\right) : \left(z^2 - z - 6\right) = z^2 - 4z + 8$$

$$\begin{array}{l}
z^4 - 5z^3 + 6z^2 + 16z - 48 \\
-\left(z^4 - z^3 - 6z^2\right) \\
\hline
 -4z^3 + 12z^2 + 16z \\
-\left(-4z^3 + 4z^2 + 24z\right) \\
\hline
 8z^2 - 8z - 48 \\
-\left(8z^2 - 8z - 48\right) \\
\hline
 0
\end{array}$$

$$z^2 - 4z + 8 = 0 \qquad / -8 + 2^2$$

$$z - 4z + 2^2 = -8 + 2^2$$

$$(z-2)^2 = -4 \qquad / \sqrt{} \qquad \left(\sqrt{-4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4}\right)$$

$$(z-2) = \pm 2i$$

$$\underline{\underline{z_3 = 2 + 2i}}, \quad \underline{\underline{z_4 = 2 - 2i}}$$

Also: $\underline{\underline{p(z) = (z+2)(z-3)\left(z-(2+2i)\right)\left(z-(2-2i)\right)}}$

Aufgabe Faktorisieren Sie

$$p(z) := z^4 - 6z^3 + 22z^2 - 30z + 13.$$

$$p(1) = 1 - 6 + 22 - 30 + 13 = 0 \quad \checkmark$$

Erste geratene Nullstelle: $\underline{\underline{z_1 = 1}}$

Abdivision von $(z - z_1) = (z - 1)$:

$$\left(z^4 - 6z^3 + 22z^2 - 30z + 13\right) : (z - 1) = \underbrace{z^3 - 5z^2 + 17z - 13}_{q(z)}$$

$$\begin{array}{l} -\left(z^4 - z^3\right) \\ \hline \quad -5z^3 + 22z^2 \\ \quad -\left(-5z^3 + 5z^2\right) \\ \hline \qquad 17z^2 - 30z \\ \qquad -\left(17z^2 - 17z\right) \\ \hline \qquad\quad -13z + 13 \\ \qquad\quad -\left(-13z + 13\right) \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$q(1) = 1 - 5 + 17 - 13 = 0 \quad \checkmark$$

Zweite NST: $\underline{\underline{z_2 = 1}}$ (doppelte NST von p)

Polynomdivision von $(z-z_2)=(z-1)$ von $q(z)$:

$$
\begin{array}{l}
(z^3-5z^2+17z-13):(z-1)=z^2-4z+13 \\
-(z^3-z^2) \\
\hline
\quad -4z^2+17z \\
\quad -(-4z^2+4z) \\
\hline
\qquad 13z-13 \\
\qquad -(13z-13) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$z^2-4z+13=0 \qquad /-13+2^2$$

$$z^2-4z+2^2=-13+2^2$$

$$(z-2)^2=-9 \qquad /\sqrt{}$$

$$\underline{\underline{z_{3/4}=2\pm 3i}}$$

Also: $\underline{\underline{p(z)=(z-1)^2\cdot(z-(2+3i))\cdot(z-(2-3i))}}$

Aufgabe

Faktorisieren Sie $p(z) = z^4 - 1$.

Offenbar gilt: $(z^4 - 1) = (z^2 - 1) \cdot (z^2 + 1)$

$$= \underline{\underline{(z-1)\cdot(z+1)\cdot(z-i)\cdot(z+i)}}.$$

Aufgabe

Faktorisieren Sie

$$p(z) := z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 32z + 40.$$

$p(2) = 16 - 16 + 24 - 64 + 40 = 0$ ✓

Erste NST: $\underline{\underline{z_1 = 2}}$

Abdivision von $(z - z_1) = (z - 2)$:

$$\left(z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 32z + 40\right) : (z-2) = \underbrace{z^3 + 6z - 20}_{q(z)}$$

$$\begin{array}{l}
-(z^4 - 2z^3) \\
\hline
0 + 6z^2 - 32z \\
-(6z^2 - 12z) \\
\hline
-20z + 40 \\
-(-20z + 40) \\
\hline
0
\end{array}$$

Suche NST von q:

$$q(2) = 8 + 12 - 20 = 0 \quad \checkmark$$

Also: $z_2 = 2$ (doppelte NST)

Polydivision von $(z-2)$ von q:

$$\left(z^3 + 0z^2 + 6z - 20\right) : (z-2) = z^2 + 2z + 10$$

$$\begin{array}{l}
-(z^3 - 2z^2) \\
\hline
2z^2 + 6z \\
-(2z^2 - 4z) \\
\hline
10z - 20 \\
-(10z - 20) \\
\hline
0
\end{array}$$

$$z^2 + 2z + 10 = 0 \qquad / -10 + 1^2$$

$$z + 2z + 1 = -9$$

$$\underline{\underline{z_{3/4} = -1 \pm 3i}}$$

Also: $\underline{\underline{p(z) = (z-2)^2 \big(z-(-1+3i)\big)\big(z-(-1-3i)\big)}}$

Aufgabe Faktorisieren Sie

$$p(z) = z^4 + 8z^3 + 27z^2 + 18z - 54 .$$

$$p(1) = 1 + 8 + 27 + 18 - 54 = 0 \ ✓$$

1. NST: $\underline{\underline{z_1 = 1}}$

Abdivision von $(z - z_1) = (z-1)$:

$$\left(z^4+8z^3+27z^2+18z-54\right):(z-1)=\underbrace{z^3+9z^2+36z+54}_{q(z)}$$

$$\begin{array}{l}
-\left(z^4-z^3\right)\\
\hline
\quad 9z^3+27z^2\\
\quad -\left(9z^3-9z^2\right)\\
\hline
\qquad 36z^2+18z\\
\qquad -\left(36z^2-36z\right)\\
\hline
\qquad\quad 54z-54\\
\qquad\quad -\left(54z-54\right)\\
\hline
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$q(-3)=-27+81-108+54=0 \checkmark$$

2. NST : $z_2=-3$; Abdivision von $(z-z_2)=(z+3)$:

$$\left(z^3+9z^2+36z+54\right):(z+3)=z^2+6z+18$$

$$\begin{array}{l}
-\left(z^3+3z^2\right)\\
\hline
\quad 6z^2+36z\\
\quad -\left(6z^2+18z\right)\\
\hline
\qquad 18z+54\\
\qquad -\left(18z+54\right)\\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$z^2+6z+18=0 \qquad / -18+3^2$$

$$(z+3)^2 = -9 \qquad / \sqrt{\ }$$

$$\underline{\underline{z_{3/4} = -3 \pm 3i}}$$

$$\underline{\underline{p(z) = (z-1)(z+3)(z-(-3+3i))(z-(-3-3i))}}$$

<u>Aufgabe</u>

Faktorisieren Sie $p(z) = z^4 - 81$.

Offenbar gilt: $z^4-81 = (z^2-9)(z^2+9)$

$$= \underline{\underline{(z-3)(z+3)(z+3i)\cdot(z-3i)}}$$

Aufgabe

Faktorisieren Sie $p(z) = z^4 + 16$.

$$z^4+16 = (z^2+4i)(z^2-4i)$$

Suche nun noch Wurzeln aus $4i$ und $-4i$:

$$4i = (a+ib)^2 \qquad a = ? \quad b = ?$$

$$\underline{0} + \underline{4}i = \underline{(a^2-b^2)} + \underline{2ab}\,i$$

$$\left.\begin{aligned} &\Longrightarrow\ a = \pm b \\ &\Longrightarrow\ a\cdot b = 2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} \underline{\underline{a=\sqrt{2}}} \wedge \underline{\underline{b=\sqrt{2}}} \\ \underline{\underline{a=-\sqrt{2}}} \wedge \underline{\underline{b=-\sqrt{2}}} \end{cases}$$

$$-4i = (a+ib)^2 \xRightarrow[\text{(analog)}]{} \begin{cases} \underline{\underline{a=\sqrt{2}}} \wedge \underline{\underline{b=-\sqrt{2}}} \\ \underline{\underline{a=-\sqrt{2}}} \wedge \underline{\underline{b=\sqrt{2}}} \end{cases}$$

Fazit: $p(z) = \Big(z-(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)\Big)\cdot\Big(z-(-\sqrt{2}-\sqrt{2}i)\Big)\cdot$

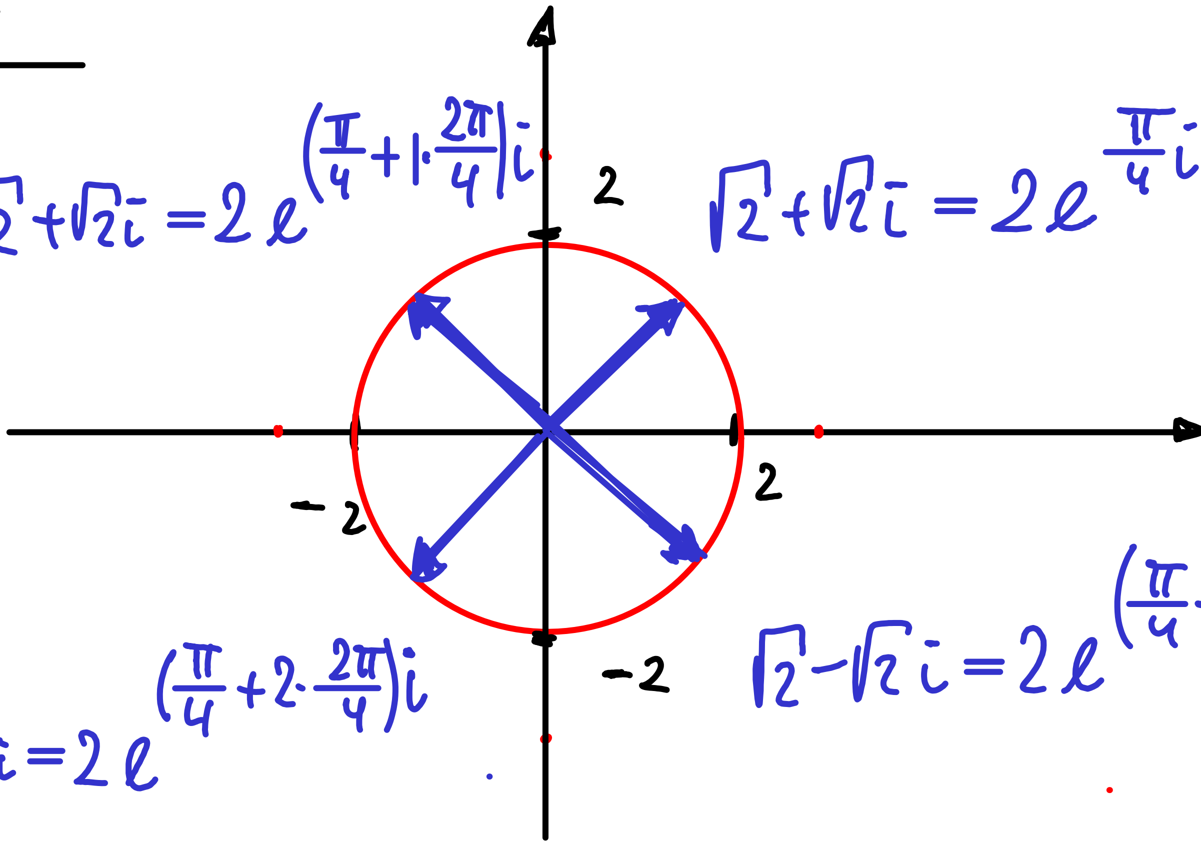
$\cdot\Big(z-(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i)\Big)\cdot\Big(z-(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)\Big).$

Alternativ: Bestimme 4-te Wurzeln aus -16!

Skizze:

$$-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i = 2e^{\left(\frac{\pi}{4}+1\cdot\frac{2\pi}{4}\right)i}$$

$$\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i = 2e^{\frac{\pi}{4}i}$$



$$-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i = 2e^{\left(\frac{\pi}{4}+2\cdot\frac{2\pi}{4}\right)i}$$

$$\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i = 2e^{\left(\frac{\pi}{4}+3\cdot\frac{2\pi}{4}\right)i}$$