Übung in 1.-Mai-Woche

Aufgabe Berechnen Sie EW/EV von

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beobachtung: A ist symmetrisch, d.h. $A = A^T$.

Dann kann man zeigen:

- EW sind reell!
- EV zu versch. EW sind orthogonal!
- A ist diagonalähnlich!

1. Schritt: EW berechnen

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & -2-\lambda \\ 0 & -1 \end{matrix}$$

$$= (1-\lambda)(-2-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda) - 9(1-\lambda)$$

$$= \underline{(1-\lambda)}\,(\underline{\lambda^2+\lambda-2}-1-9)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-12)$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+4) = 0$$

<u>Also:</u> $\underline{\underline{\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3}}$

(alle reell, wie erwartet)

<u>2. Schritt:</u> EV berechnen

<u>EV $\vec{v}^{(1)}$ zum EW $\lambda_1 = -4$:</u>

$$(A-\lambda_1 E)\,\vec{v}^{(1)} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 1+4 & 3 & 0 \\ 3 & -2+4 & -1 \\ 0 & -1 & 1+4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ v_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{z.B. } \underline{\underline{\vec{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

EV $\vec{r}^{(2)}$ zum EW $\lambda_2 = 1$:

$$(A - \lambda_2 E)\vec{r}^{(2)} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(2)} \\ r_2^{(2)} \\ r_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{z.B. } \vec{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

EV $\vec{r}^{(3)}$ zum EW $\lambda_3 = 3$:

$$(A - \lambda_3 E)\vec{r}^{(3)} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(3)} \\ r_2^{(3)} \\ r_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{z.B. } \vec{r}^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten die drei Eigenvektoren

$$\vec{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Diese stehen offenbar paarweise senkrecht aufeinander!
Nachrechnen durch Bildung des Skalarprodukts:

$$\vec{r}^{(1)T}\,\vec{r}^{(2)} = (-3,5,1)\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} = -3+0+3 = \underline{\underline{0}}$$

$$\vec{r}^{(1)T}\,\vec{r}^{(3)} = (-3,5,1)\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} = -9+10-1 = \underline{\underline{0}}$$

$$\vec{r}^{(2)T}\,\vec{r}^{(3)} = (1,0,3)\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} = 3+0-3 = \underline{\underline{0}}$$

senkrecht, wie erwartet!

Man erhält hier für R mit $R^{-1}AR$ ergibt Diagonalgestalt:

$$R := \begin{pmatrix}-3 & 1 & 3\\5 & 0 & 2\\1 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

Aufgabe

Berechnen Sie EW/EV von

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Beobachtung: $A = A^T$, also A symmetrisch! Ferner ist 6 ein EW, da $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ mittlere Spalte ist. EV zu 6 wäre z.B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Schritt: EW berechnen:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda) - 16(6-\lambda)$$

$$= \underline{(6-\lambda)}\,(\underline{\lambda^2-4\lambda+4}-16)$$

$$= (6-\lambda)(\lambda^2-4\lambda-12)$$

$$= -(\lambda-6)(\lambda-6)(\lambda+2) = 0\,,$$

d.h. $\underline{\underline{\lambda_1=-2\,,\ \underline{\lambda_2=6\,,\ \lambda_3=6}}}$

doppelter EW, aber alle, wie erwartet, reell!

<u>2. Schritt:</u> EV berechnen

<u>EV $\vec{r}^{(1)}$ zu $\lambda_1=-2$:</u>

$$(A-\lambda_1 E)\vec{r}^{(1)} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \\ r_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{z.B. } \underline{\underline{\vec{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}\,.$$

EV $\vec{r}^{(2/3)}$ zu $\lambda_{2/3} = 6$:

$$(A - \lambda_{2/3} E)\vec{r} = \vec{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Suche nun 2 linear unabhängige Lösungen des obigen Systems, am besten sogar orthogonale:

$$\text{z.B. } \underline{\underline{\vec{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}, \quad \underline{\underline{\vec{r}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

Man erkennt wieder, dass die 3 Vektoren $\vec{r}^{(1)}$, $\vec{r}^{(2)}$ und $\vec{r}^{(3)}$ orthogonal sind! ✓

Man erhält hier für R mit $R^{-1}AR$ ergibt Diagonalgestalt:

$$R := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe

Berechnen Sie EW/EV von

$$A := \begin{pmatrix} 8 & \frac{5}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{5}{\sqrt{2}} & 8 & \frac{5}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{2}} & 8 \end{pmatrix}.$$

1. Schritt: EW berechnen

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} 8-\lambda & \frac{5}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{5}{\sqrt{2}} & 8-\lambda & \frac{5}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{2}} & 8-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \underline{(8-\lambda)}^3 - \frac{25}{2}\underline{(8-\lambda)} - \frac{25}{2}\underline{(8-\lambda)}$$

$$= \underline{(8-\lambda)}\left(\lambda^2 - 16\lambda + 64 - 25\right)$$

$$= (8-\lambda)(\lambda^2 - 16\lambda + 39)$$

$$= -(\lambda-8)(\lambda-3)(\lambda-13) = 0$$

Also: $\underline{\underline{\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 8, \quad \lambda_3 = 13}}$

reelle EW, wie erwartet!

2. Schritt: EV berechnen

EV $\vec{r}^{(1)}$ zu $\lambda_1 = 3$:

$$(A-\lambda_1 E)\vec{r}^{(1)} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 5 & \frac{5}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{5}{\sqrt{2}} & 5 & \frac{5}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{2}} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \\ r_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{z.B. } \vec{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

EV $\vec{r}^{(2)}$ zu $\lambda_2 = 8$:

$$(A-\lambda_2 E)\vec{r}^{(2)} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{5}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(2)} \\ r_2^{(2)} \\ r_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{z.B. } \vec{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.}}$$

EV $\vec{r}^{(3)}$ zu $\lambda_3 = 13$:

$$(A - \lambda_3 E)\vec{r}^{(3)} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} -5 & \frac{5}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{5}{\sqrt{2}} & -5 & \frac{5}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{2}} & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(3)} \\ r_2^{(3)} \\ r_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{z.B. } \vec{r}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die EV lauten:

$$\vec{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wie erwartet stehen die EV senkrecht zueinander!

Man erhält hier für R mit $R^{-1}AR$ ergibt Diagonalgestalt:

$$R := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe

Berechnen Sie EW/EV von

$$A := \begin{pmatrix} -\frac{7}{25} & 0 & \frac{24}{25} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{24}{25} & 0 & \frac{7}{25} \end{pmatrix}.$$

1. Schritt: EW berechnen

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\frac{7}{25}-\lambda & 0 & \frac{24}{25} \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ \frac{24}{25} & 0 & \frac{7}{25}-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \left(-\frac{7}{25}-\lambda\right)(1-\lambda)\left(\frac{7}{25}-\lambda\right) - \frac{576}{625}(1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)\left(\lambda^2 - \frac{49}{625} - \frac{576}{625}\right)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 1)$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+1) = 0$$

Also: $\underline{\underline{\lambda_1 = -1 \,,\, \lambda_2 = \lambda_3 = 1}}$ ✓ wie erwartet!

<u>2. Schritt:</u> EV berechnen

<u>EV $\vec{r}^{(1)}$ zu $\lambda_1 = -1$:</u>

$$(A - \lambda_1 E)\vec{r}^{(1)} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} \frac{18}{25} & 0 & \frac{24}{25} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{24}{25} & 0 & \frac{32}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \\ r_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{z.B. } \underline{\underline{\vec{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$

EV $\vec{r}^{(2/3)}$ zu $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$:

$$(A - \lambda_{2/3} E)\vec{r}^{(2/3)} = \vec{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{32}{25} & 0 & \frac{24}{25} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{24}{25} & 0 & -\frac{18}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

z.B. $\vec{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

EV wieder paarw. orthogonal!

Man erhält hier für R mit $R^{-1}AR$ ergibt Diagonalgestalt:

$$R := \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$