Fachhochschule Dortmund
University of Applied Sciences and Arts

Studiengang Informatik

Prüfungsfach: Mathematik für Informatiker 2
Prüfer: Prof. Dr. Burkhard Lenze
Prüfungstermin: 14.02.2022
Dauer der Prüfung: 60 Minuten
Hilfsmittel: Ein beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt

Name, Vorname: ______________________________

Matrikel/Platz: ________________ / __________

Unterschrift: ______________________________

Hinweise:

- Füllen Sie zunächst das Deckblatt aus und unterschreiben Sie es! •
- Es gibt insgesamt 4 Aufgaben und maximal 75 Punkte sind erreichbar! •

- Verwenden Sie für die Lösungen nur die gegebenen Blätter! •
- Verwenden Sie einen dokumentenechten Stift (keinen Bleistift)! •
- Lassen Sie bitte alle Blätter im zusammengehefteten Zustand! •
- Geben Sie bei allen Aufgaben den kompletten Lösungsweg an! •
- Ohne den zugehörigen Lösungsweg gibt es stets nur 0 Punkte! •

Bewertungsschlüssel:

Punkte	66,5	63	59,5	56	52,5	49	45,5	42	38,5	35	< 35
Note	1.0	1.3	1.7	2.0	2.3	2.7	3.0	3.3	3.7	4.0	5.0

Ergebnis:

Aufgabe	1	2	3	4		**Summe**	**Note**
maximale Punkte	15	20	20	20		75	
erhaltene Punkte							

Name: ________________ Vorname: ________________

Aufgabe 1 *Es sei die Zahl $a \in \mathbb{N}$ genau die zweitkleinste Ziffer in Ihrer Matrikelnummer, also z.B. für Matrikelnummer 7155050 wäre $a = 1$ (kleinste Ziffer ist 0) und für Matrikelnummer 7111454 wäre $a = 4$ (kleinste Ziffer ist hier 1). Setzen Sie nun a in das folgende Polynom* 15 Punkte

$$x^4 - ax^3 - 3x^3 + 3ax^2 + 12x^2 - 12ax - 10x + 10a$$

ein und faktorisieren Sie das Polynom dann in Linearfaktoren.

Lösung:

```
Allgemeine Lösung:

Rate z_1 = 1

Abdivision von (x-1):

(x^4-ax^3-3x^3+3ax^2+12x^2-12ax-10x+10a):(x-1)
                               = x^3-ax^2-2x^2+2ax+10x-10a

Rate z_2 = a

Abdivision von (x-a):

(x^3-ax^2-2x^2+2ax+10x-10a):(x-a)=x^2-2x+10

Quadratisches Polynom mit p/q-Formel:

z_3/4 = -(-2/2) +/- sqrt((-2/2)^2-10) = 1 +/- sqrt(-9)

Also z_3 = 1+3i
und  z_4 = 1-3i

Die Faktorisierung des Polynoms lautet somit:

                (x-1)(x-a)(x-(1+3i))(x-(1-3i)) .
```

Original-Eingabeformular für die Lösung der Aufgabe zur Erinnerung:

Meine Matrikelnummer lautet: ???
Also lautet meine zu benutzende Ziffer a = ???

Aufgabe 2 *Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,* 20 Punkte

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Geben Sie ferner eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, so dass $C^{-1}AC$ Diagonalgestalt hat.

Lösung:

1. Schritt: Aus der Gleichung

$$p(\lambda) \;=\; \det(A-\lambda E) \;=\; \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-4) \;=\; 0$$

berechnen sich die Lösungen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$, also die Eigenwerte von A.
2. Schritt: Aus dem Gleichungssystem

$$(A-\lambda_1 E)\vec{r}^{(1)} = \vec{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 3-2 & 0 & -1 \\ 1 & 4-2 & 1 \\ -1 & 0 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \\ r_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergeben sich alle zu $\lambda_1 = 2$ gehörenden Eigenvektoren zu

$$\vec{r}^{(1)} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \;\; \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\} .$$

Aus dem Gleichungssystem

$$(A-\lambda_{2/3} E)\vec{r}^{(2/3)} = \vec{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 3-4 & 0 & -1 \\ 1 & 4-4 & 1 \\ -1 & 0 & 3-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(2/3)} \\ r_2^{(2/3)} \\ r_3^{(2/3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergeben sich alle zu $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$ gehörenden Eigenvektoren zu

$$\vec{r}^{(2)} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \;\; \alpha,\beta \in \mathbb{C}, \;\; |\alpha| + |\beta| \neq 0 .$$

Die gesuchte Matrix C kann man z.B. erhalten, indem man die Eigenvektoren als Spaltenvektoren in C schreibt, also

$$C := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Original-Eingabeformular für die Lösung der Aufgabe zur Erinnerung:

Bitte nur die Lösungen eingeben, es ist keine Rechnung notwendig!

Eigenwerte:

Name: _______________ Vorname: _______________

Aufgabe 3 *Berechnen Sie das algebraische Polynom $p(x) := x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ vom genauen Grad 3, welches an der Stelle $x_1 := -1$ ein lokales Maximum und an der Stelle $x_2 := 3$ ein lokales Minimum hat sowie an der Stelle $x_3 := 5$ den Funktionswert $p(x_3) = 15$ besitzt.* 20 Punkte

Lösung:
Einerseits gilt

$$p'(x) \;=\; 3x^2 + 2a_2x + a_1$$

und andererseits auch

$$p'(x) \;=\; 3(x+1)(x-3) \;=\; 3x^2 - 6x - 9\;.$$

Mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs folgt daraus sofort $a_2 := -3$ und $a_1 : -9$. Wegen $p(5) = 15$ ergibt sich schließlich der noch fehlende Koeffizient a_0 aus der Gleichung

$$p(x) \;=\; 5^3 - 3\cdot 5^2 - 9\cdot 5 + a_0 \;=\; 5 + a_0 \;=\; 15$$

zu $a_0 := 10$. Insgesamt lautet das gesuchte Polynom also

$$p(x) := x^3 - 3x^2 - 9x + 10\;.$$

Original-Eingabeformular für die Lösung der Aufgabe zur Erinnerung:

Das Polynom lautet: p(x) = ??? x*x*x + ??? x*x + ??? x + ???

Bitte skizzieren Sie kurz, wie Sie diese Lösung gefunden haben:

Aufgabe 4 *Berechnen Sie:*

(a) 5 Punkte

$$\left(\frac{\sin(x)}{\cos(3x^4-5x)}\right)',$$

(b) 5 Punkte

$$\left((\exp(x))^3(3x^2+\cos(x))\right)',$$

(c) 5 Punkte

$$\int_0^\pi \exp(2\sin(x))\cos(x)dx,$$

(d) 5 Punkte

$$\int_{-1}^2 x\ \exp(x)dx.$$

Lösung:

(a)

$$\left(\frac{\sin(x)}{\cos(3x^4-5x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cdot\cos(3x^4-5x)+\sin(x)\cdot(12x^3-5)\cdot\sin(3x^4-5x)}{(\cos(3x^4-5x))^2}$$

(b)

$$\left((\exp(x))^3(3x^2+\cos(x))\right)' = 3(\exp(x))^2\cdot\exp(x)\cdot(3x^2+\cos(x))+(\exp(x))^3\cdot(6x-\sin(x))$$

(c)

$$\int_0^\pi \exp(2\sin(x))\cos(x)dx = 0$$

(d)

$$\int_{-1}^2 x\exp(x)dx = e^2+2e^{-1}$$

Original-Eingabeformular für die Lösung der Aufgabe zur Erinnerung:

Hier ist auch jeweils anzugeben, welche Differentiations- bzw.
Integrationsregel(n) Sie verwendet haben!